

0502572

第一章 复数及平面点集

1. 计算:

$$(1) (1+i) + (1-2i) \quad (\text{并作图})$$

$$(2) (\bar{i}-1)(\bar{i}-2)(\bar{i}-3) :$$

$$(3) \sqrt{2}(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta)$$

其中: $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \arctan 2$, $\beta = \arctan 3$ 。

$$\text{解: } (1) (1+i) + (1-2i) = 2-i;$$

$$(1+i) - (1-2i) = 3i \quad (\text{图1.1}).$$

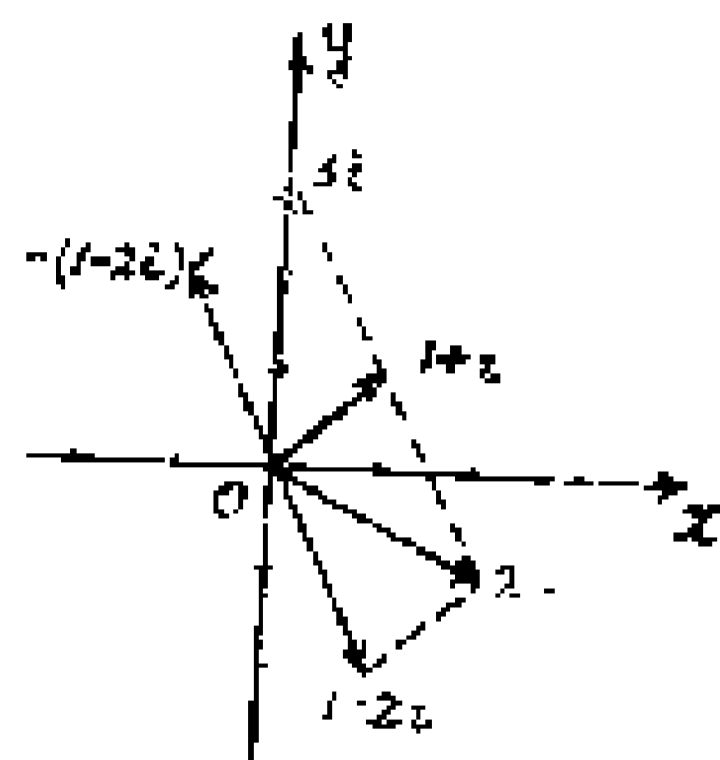
$$(2) (\bar{i}-1)(\bar{i}-2)(\bar{i}-3) = (1-i)(2-i)(3-i)$$

$$= \frac{-i(1+i)(2+i)(3+i)}{(1+1)(2^2+1)(3^2+1)}$$

$$= \frac{-10i^2}{100} = \frac{1}{10}$$

$$(3) \because \tan \alpha = 2, \tan \beta = 3;$$

$$\therefore \tan(\alpha + \beta) = \frac{2+3}{1-2 \cdot 3} = -1.$$



(图1.1)

又 $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2} \therefore \alpha + \beta = \frac{3}{4}\pi$. 从而

$$\cos(\alpha + \beta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

故 原式 $= \sqrt{2}[\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)] = -1 + i$.

2. 证明:

$$(1) z_1 + (z_2 + z_3) \\ = (z_1 + z_2) + z_3 \text{ (并作图);}$$

$$(2) z_1(z_2 + z_3) \\ = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

证: (1) 设

$$z_k = x_k + iy_k \quad (k = 1, 2, 3).$$

(图1.2)

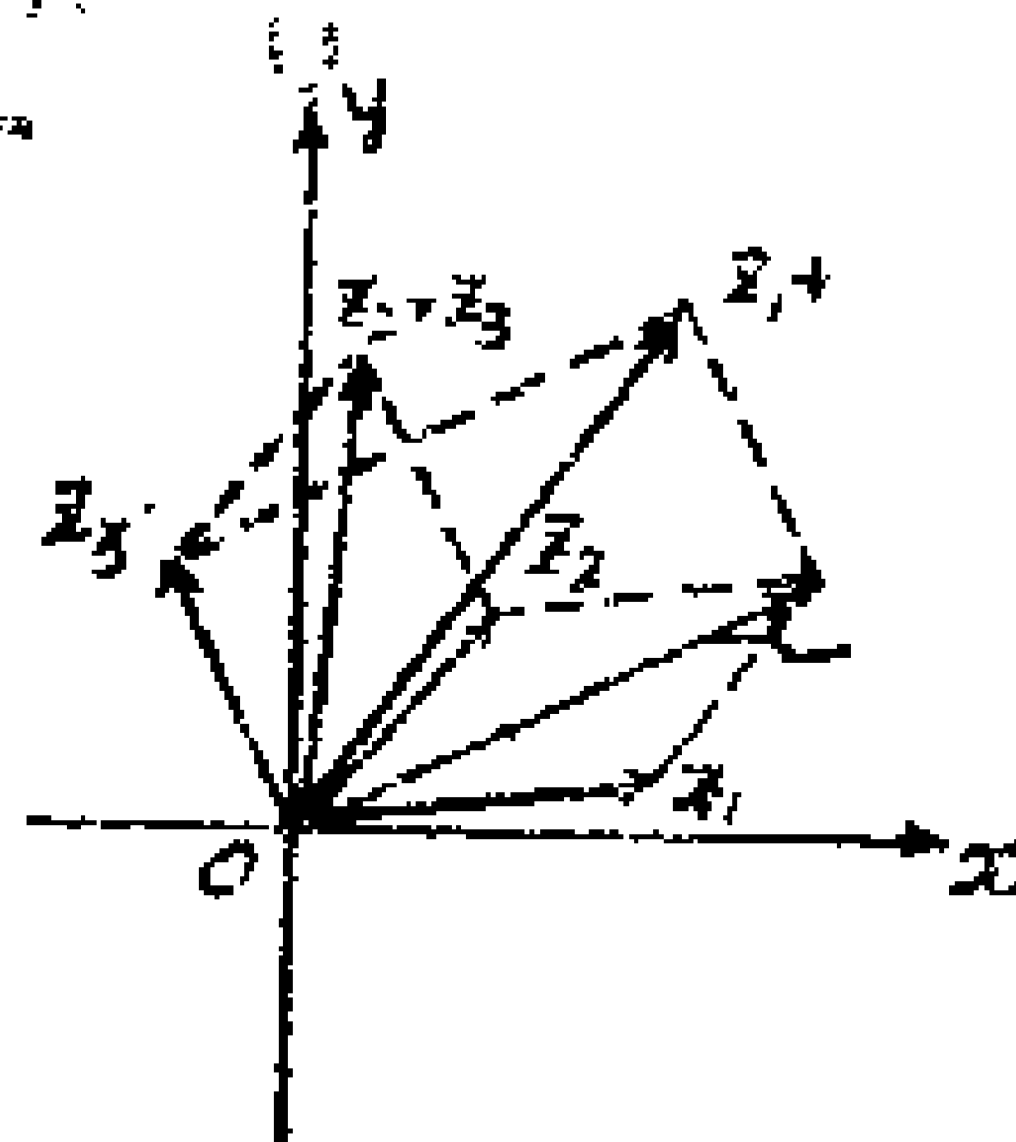
$$\begin{aligned} \text{左端} &= (x_1 + iy_1) + [(x_2 + iy_2) + (x_3 + iy_3)] \\ &= (x_1 + iy_1) + [(x_2 + x_3) + i(y_2 + y_3)] \\ &= [x_1 + (x_2 + x_3)] + i[y_1 + (y_2 + y_3)] \\ &= [(x_1 + x_2) + x_3] + i[(y_1 + y_2) + y_3] \\ &= [(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)] + (x_3 + iy_3) \\ &= (z_1 + z_2) + z_3. \end{aligned}$$

所以原等式成立 (图1.2).

(2) 假设同 (1).

$$\begin{aligned} \text{左端} &= (x_1 + iy_1)[(x_2 + iy_2) + (x_3 + iy_3)] \\ &= (x_1 + iy_1)[(x_2 + x_3) + i(y_2 + y_3)] \\ &= [x_1(x_2 + x_3) - y_1(y_2 + y_3)] + i[x_1(y_2 + y_3) + y_1(x_2 + x_3)] \\ &= [(x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 x_3 - y_1 y_3)] + \\ &\quad + i[(x_1 y_2 + y_1 x_2) + (x_1 y_3 + y_1 x_3)] \\ &= [(x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)] + \\ &\quad + [(x_1 x_3 - y_1 y_3) + i(x_1 y_3 + y_1 x_3)] \\ &= z_1 z_2 + z_1 z_3 \end{aligned}$$

所以原等式成立.



证明: (i) 当且仅当 $z = \bar{z}$ 时, 复数 z 为实数.

) 设 z_1 及 z_2 是两复数, 如果 $z_1 + z_2$ 和 $z_1 z_2$ 都是实数, z_1 和 z_2 或者都是实数, 或者是一对共轭复数.

(1) 设 $z = x + iy$ 则 $\bar{z} = x - iy$

若 $z = \bar{z}$ 则 $x + iy = x - iy$

故有 $y = -y$ 即 $y = 0$, $\therefore z$ 为实数.

反之, 若 z 为实数, 则 $y = 0$, 故有 $z = \bar{z}$.

2) 设 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$.

若 $z_1 z_2$ 和 $z_1 + z_2$ 都是实数, 则有

$$x_1 y_2 + x_2 y_1 = 0 \quad \text{及} \quad y_1 + y_2 = 0 \quad (1)$$

当 $y_1 = 0$ 时, 那么 $y_2 = 0$, 故 z_1, z_2 都是实数;

当 $y_1 \neq 0$ 时, 则由 (1) 可得 $x_1 = x_2$, $-y_1 = y_2$,

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_1 - iy_1.$$

故 z_1, z_2 为一对共轭复数.

求复数 $\frac{z-1}{z+1}$ 的实部及虚部.

解: 设 $z = x + iy$,

$$\text{则} \quad \frac{z-1}{z+1} = \frac{(x-1) + iy}{(x+1) + iy} = \frac{x^2 + y^2 - 1 + i2y}{(x+1)^2 + y^2}$$

$$\operatorname{Re} \frac{z-1}{z+1} = \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x+1)^2 + y^2}, \quad \operatorname{Im} \frac{z-1}{z+1} = \frac{2y}{(x+1)^2 + y^2}.$$

5. 设 z_1 及 z_2 是两复数, 求证:

$$(1) \quad |z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2);$$

$$(2) \quad |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||;$$

(3) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$, 并
其几何意义.

$$\begin{aligned}
\text{证: (1) } |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) \\
&= (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \\
&= z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_2) \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)
\end{aligned}$$

(2) 由(1)题知:

$$\begin{aligned}
|z_1 - z_2|^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2), \\
\text{又 } ||z_1| - |z_2||^2 &= |z_1|^2 - 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||\bar{z}_2| \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1\bar{z}_2|.
\end{aligned}$$

$$\because |z_1\bar{z}_2| \geq \operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2),$$

$$\therefore |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) \geq |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1\bar{z}_2|.$$

$$\text{即: } |z_1 - z_2|^2 \geq ||z_1| - |z_2||^2.$$

$$\text{两边开平方得: } |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||.$$

$$\begin{aligned}
(3) \because |z_1 + z_2|^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2), \\
|z_1 - z_2|^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2),
\end{aligned}$$

$$\text{两式相加得: } |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

其几何意义是: 平行四边形两对角线长的平方和等于两邻边平方和的两倍。

$$6. \text{ 设 } z = x + iy, \text{ 证明: } \frac{|x| + |y|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |x| + |y|.$$

$$\text{证: } \because |z| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2} \leq \sqrt{(|x| + |y|)^2}$$

$$= |x| + |y|,$$

$$2|xy| \leq |x|^2 + |y|^2.$$

$$\therefore 2|z|^2 = 2(\sqrt{|x|^2 + |y|^2})^2 = 2(|x|^2 + |y|^2)$$

$$\geq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2,$$

$$\text{两边开平方并除以 } \sqrt{2} \text{ 得: } |z| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} (|x| + |y|),$$

$$\therefore \frac{|x| + |y|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |x| + |y|.$$

7. 试证: 分别以 z_1, z_2, z_3 , 及 w_1, w_2, w_3 为顶点的两个三角形同向相似的必要与充分条件是:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

证: 由复数的几何意义及平面几何学中关于相似三角形的判定定理和性质定理, 可知这两个三角形同向相似的必要与充分条件是:

$$\frac{|z_3 - z_1|}{|z_2 - z_1|} = \frac{|w_3 - w_1|}{|w_2 - w_1|}$$

$$\arg(z_3 - z_1) - \arg(z_2 - z_1)$$

$$= \arg(w_3 - w_1) - \arg(w_2 - w_1)$$

$$\text{也就是: } \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{w_3 - w_1}{w_2 - w_1} \quad (*)$$

$$\text{又由 } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z_1 & z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \\ w_1 & w_2 - w_1 & w_3 - w_1 \end{vmatrix} =$$

$$= (z_2 - z_1)(w_3 - w_1) - (z_3 - z_1)(w_2 - w_1),$$

及(*)式与 $(z_2 - z_1)(w_3 - w_1) - (z_3 - z_1)(w_2 - w_1) = 0$ 等价, 知(*)式与

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

等价。故得题中的结论。

8. 如果 $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, 且 $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, 证明 z_1, z_2, z_3 是内接于单位圆的一个正三角形的顶点。

证法一: 设 $z_k = x_k + iy_k$ ($k = 1, 2, 3$), 由已知条件可知:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 0 \end{cases} \quad (1) \quad \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = 1 \quad (2) \\ x_2^2 + y_2^2 = 1 \quad (3) \\ x_3^2 + y_3^2 = 1 \quad (4) \end{cases}$$

由(1)解出 x_1, y_1 代入(2)得: $2x_2x_3 + 2y_2y_3 = 1, (5)$

$-1 \times (5) + (3) + (4)$ 得: $(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 = 3;$

即: $|z_2 - z_3| = \sqrt{3}.$

同理可得: $|z_1 - z_3| = |z_1 - z_2| = \sqrt{3}$, 故 z_1, z_2, z_3 是正三角形的顶点。

又由已知条件知: z_1, z_2, z_3 都是单位圆上的点, 故 z_1, z_2 和 z_3 是内接于单位圆的正三角形的顶点。

证法二:

由 $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, 得 $z_3 = -(z_1 + z_2).$

取其共轭复数 $\bar{z}_3 = -(\bar{z}_1 + \bar{z}_2),$

$$\therefore z_3 \bar{z}_3 = z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2$$

$$\text{又 } |z_1|^2 = |z_2|^2 = |z_3|^2 = 1,$$

$$\therefore z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = -1,$$

$$\begin{aligned} \therefore |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 - (\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2) = 1 + 1 - (-1) = 3, \end{aligned}$$

$$\text{故 } |z_1 - z_2| = \sqrt{3}.$$

$$\text{同理可证: } |z_1 - z_3| = |z_2 - z_3| = \sqrt{3}$$

$\therefore z_1, z_2$ 和 z_3 是内接于单位圆的正三角形的顶点。

证法三:

考虑方程 $(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = 0$, 显然它的三个根就是 z_1, z_2, z_3 .

设多项式

$$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \equiv z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3,$$

比较系数得: $a_1 = z_1 + z_2 + z_3 = 0$,

$$\because |z_k| = 1, \therefore z_k^{-1} = \bar{z}_k \quad (k = 1, 2, 3),$$

$$\begin{aligned} \therefore a_2 &= z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = z_1 z_2 z_3 (\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3) \\ &= 0. \end{aligned}$$

因此所考虑的方程变为: $z^3 + a_3 = 0$ (1)

由于 $z_1^3 + a_3 = 0$ 知 $|a_3| = |-z_1^3| = 1$,

因此 (1) 的三个根 z_1, z_2, z_3 满足关系式:

$$c z_1 = z_2, \quad c^2 z_1 = z_3,$$

其中 $c = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ$.

从而 z_1, z_2 和 z_3 是内接于单位圆的正三角形的顶点。

9. 求证: $(1 + \cos \theta + i \sin \theta)^n$

$$= 2^n \cos^n \frac{\theta}{2} \cdot \left(\cos \frac{n\theta}{2} + i \sin \frac{n\theta}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \text{证: 左端} &= \left(2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + i 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right)^n \\
 &= \left[2 \cos \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) \right]^n \\
 &= 2^n \cos^n \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{n\theta}{2} + i \sin \frac{n\theta}{2} \right) = \text{右端}.
 \end{aligned}$$

10. 解方程: $z^2 - 3iz - (3 - i) = 0$.

解法一: 由求根公式得: $z = \frac{3i + \sqrt{3 - 4i}}{2}, \quad (1)$

令 $\sqrt{3 - 4i} = a + bi$, 则 $3 - 4i = a^2 - b^2 + 2abi$.

比较系数得:
$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = -4. \end{cases}$$

解方程组得, $a = \pm 2, b = \pm 1$

因此: $\sqrt{3 - 4i} = \pm(-2 + i)$, 代入 (1) 得:

$$z_1 = \frac{3i + (-2 + i)}{2} = -1 + 2i,$$

$$z_2 = \frac{3i - (-2 + i)}{2} = 1 + i.$$

解法二: 由求根公式得: $z = \frac{3i + \sqrt{3 - 4i}}{2}.$

设 $3 - 4i = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, 则

$$r = 5, \quad \operatorname{tg} \theta = -\frac{4}{3}, \quad \cos \theta = \frac{3}{5} \quad (\theta \text{ 是第四象限角})$$

$$\begin{aligned}
 \text{所以, } \sqrt{3 - 4i} &= 5^{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{2} \right) \\
 &\quad (k = 0, 1).
 \end{aligned}$$

当 $k = 0$ 时

$$\begin{aligned}
\sqrt{3} - 4i &= 5^{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) \\
&= 5^{\frac{1}{2}} \left(-\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} + i \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \right) \\
&= 5^{\frac{1}{2}} \left(-\sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{2}} + i \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}} \right) \\
&= 5^{\frac{1}{2}} \left(-\sqrt{\frac{4}{5}} + i \sqrt{\frac{1}{5}} \right) = -2 + i.
\end{aligned}$$

当 $k=1$ 时,

$$\begin{aligned}
\sqrt{3} - 4i &= 5^{\frac{1}{2}} \left[\cos \left(\frac{\theta}{2} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{2} + \pi \right) \right] \\
&= -5^{\frac{1}{2}} \left[\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right] = 2 - i.
\end{aligned}$$

故方程组的解为:

$$z_1 = -1 + 2i, \quad z_2 = 1 + i.$$

11. 求: $\frac{1}{2}(\sqrt{2} + i\sqrt{2})$ 的三次方根。

$$\text{解: } \because \frac{1}{2}(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4},$$

$$\begin{aligned}
\therefore \sqrt[3]{\frac{1}{2}(\sqrt{2} + i\sqrt{2})} &= \cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3} \\
&\quad (k=0, 1, 2)
\end{aligned}$$

所求的三次方根为:

$$w_1 = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12},$$

$$w_2 = \cos \frac{9\pi}{12} + i \sin \frac{9\pi}{12} = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \\ = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$w_3 = \cos \frac{17}{12}\pi + i \sin \frac{17}{12}\pi.$$

12. 设 $|z_0| < 1$, 证明:

$$\text{如果 } |z| = 1, \text{ 那么 } \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} \right| = 1;$$

$$\text{如果 } |z| < 1, \text{ 那么 } \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} \right| < 1.$$

证: 若 $|z| = 1$, 则有:

$$\begin{aligned} |z - z_0| &= |z| |z - z_0| = |z| |z - z_0| \\ &= |z\overline{z} - z\overline{z_0}| = |1 - z\overline{z_0}| \\ \therefore \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} \right| &= 1. \end{aligned}$$

若 $|z| < 1$, 则 $|z|^2(1 - |z_0|^2) < 1 - |z_0|^2$.

$$\therefore |z|^2 + |z_0|^2 < 1 + |z|^2|z_0|^2,$$

$$\begin{aligned} |z - z_0|^2 &= |z|^2 + |z_0|^2 - 2\operatorname{Re}(z\overline{z_0}) \\ &< 1 + |z|^2|z_0|^2 - 2\operatorname{Re}(z\overline{z_0}) = |1 - z\overline{z_0}|^2. \end{aligned}$$

$$\therefore \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} \right|^2 < 1$$

由于复数模非负, 两边开平方即得:

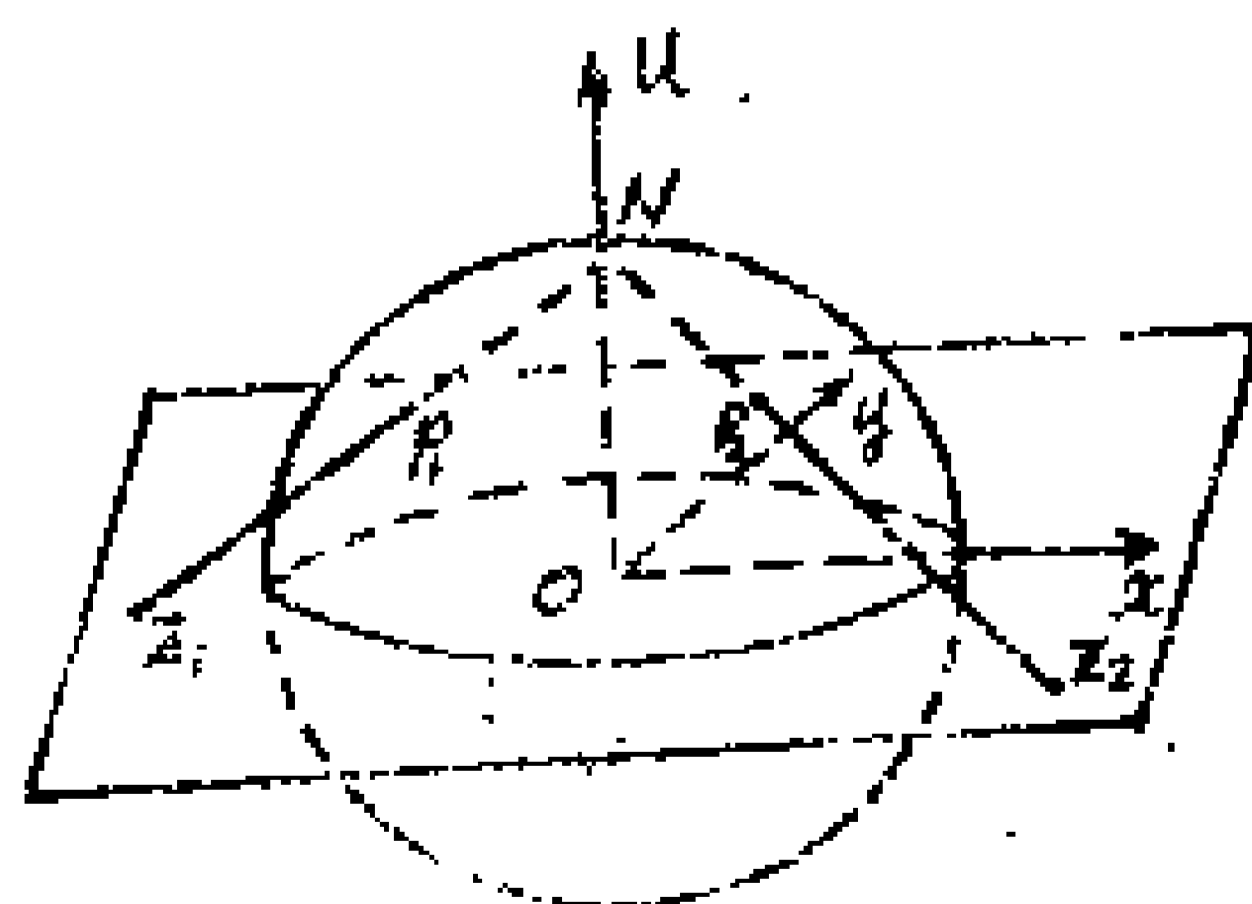
$$\left| \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_1} \right| < 1.$$

13. 设有限复数 z_1 及 z_2 在复球面上表示为 P_1 及 P_2 两点。求证 P_1 及 P_2 的距离是:

$$\frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)}}$$

证: 如(图1. 3), 设复球面上的两点 P_1, P_2 的坐标分别为 $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1), (\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$, 球极为 $N(0, 0, 1)$ 。

又设复平面上与 P_1, P_2 对应的点分别为 $z_1(x_1, y_1, 0)$, $z_2(x_2, y_2, 0)$ 。



(图 1. 3)

由于 P_1, P_2 在球面上,

$$\therefore \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 = 1, \quad \xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2 = 1.$$

又由于 N, P_1, z_1 在一条直线上

$$\therefore \frac{\xi_1 - 0}{x_1 - 0} = \frac{\eta_1 - 0}{y_1 - 0} = \frac{\zeta_1 - 1}{0 - 1},$$

$$\text{故 } x_1 = \frac{\xi_1}{1 - \zeta_1}, \quad y_1 = \frac{\eta_1}{1 - \zeta_1}.$$

$$\begin{aligned} \text{又因 } |z_1|^2 = x_1^2 + y_1^2 &= \frac{\xi_1^2 + \eta_1^2}{(1 - \zeta_1)^2} = \frac{1 - \zeta_1^2}{(1 - \zeta_1)^2} \\ &= \frac{1 + \zeta_1}{1 - \zeta_1}, \end{aligned}$$

$$\therefore \zeta_1 = \frac{|z_1|^2 - 1}{1 + |z_1|^2}.$$

故可求得: $\xi_1 = \frac{2x_1}{1+|z_1|^2}, \quad \eta_1 = \frac{2y_1}{1+|z_1|^2}.$

同理可求得:

$$\xi_2 = \frac{2x_2}{1+|z_2|^2}, \quad \eta_2 = \frac{2y_2}{1+|z_2|^2},$$

$$\zeta_2 = \frac{|z_2|^2 - 1}{|z_2|^2 + 1}.$$

由两点间的距离公式得:

$$\begin{aligned} |P_1 P_2| &= \sqrt{(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 + (\zeta_2 - \zeta_1)^2} \\ &= \sqrt{2(-\xi_1 \xi_2 - \eta_1 \eta_2 - \zeta_1 \zeta_2)} \\ &= \sqrt{\frac{4[|z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)]}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}} \\ &= \sqrt{\frac{2^2 |z_1 - z_2|^2}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}} \\ &= \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}}. \end{aligned}$$

14. 满足下列条件的点 z 所组成的点集是什么? 如果是区域, 是单连通区域还是多连通区域?

(1) $\operatorname{Im} z = 3.$

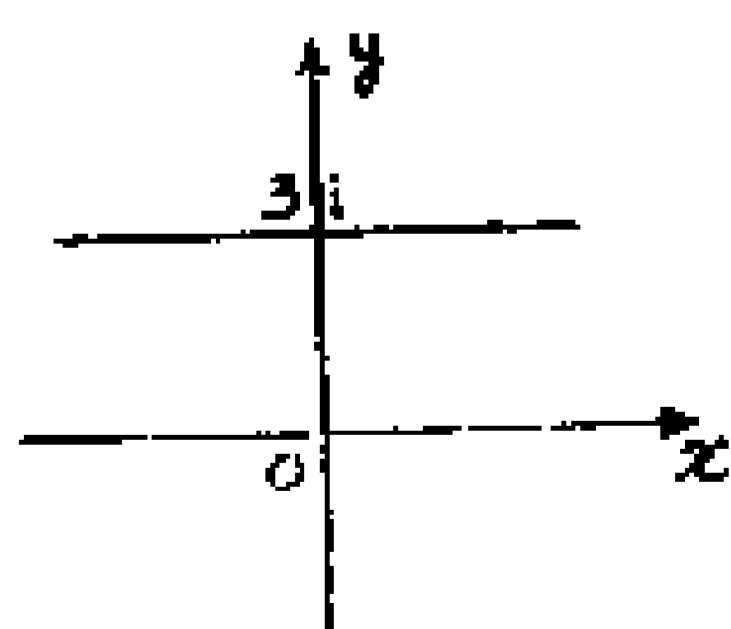
解: 满足条件的一切点 z 所组成的点集是过点 $3i$ 且平行于实轴的一条直线 (图 1. 4)。它不是区域。

(2) $\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}.$

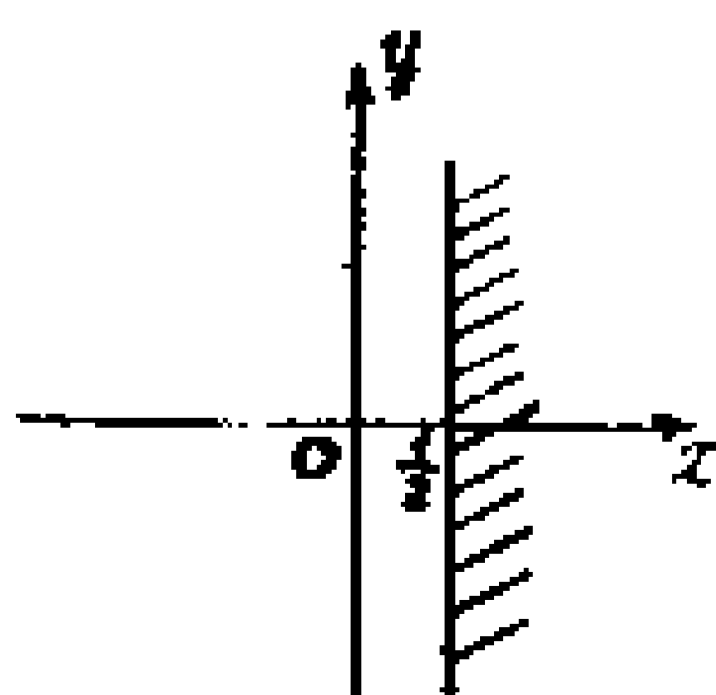
解: 满足条件的一切点 z 所组成的点集是以直线

$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ 为左界的半平面 (不包括 $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$) 它是单连

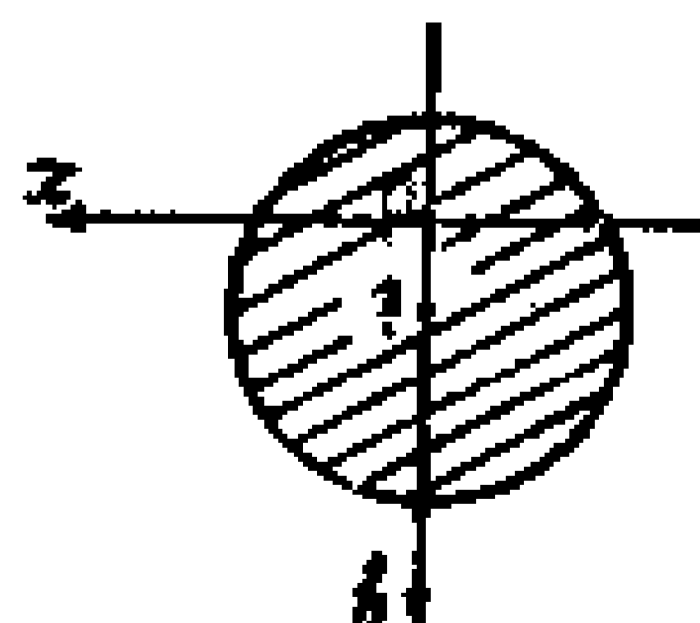
通区域(图1.5)



(图1.4)



(图1.5)



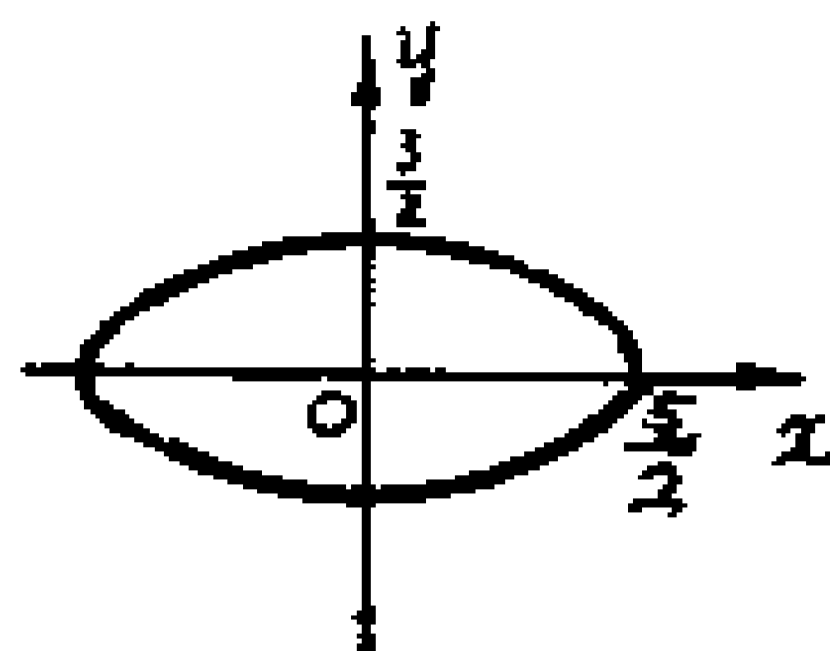
(图1.6)

$$(3) |z - i| \leq |2 + i|.$$

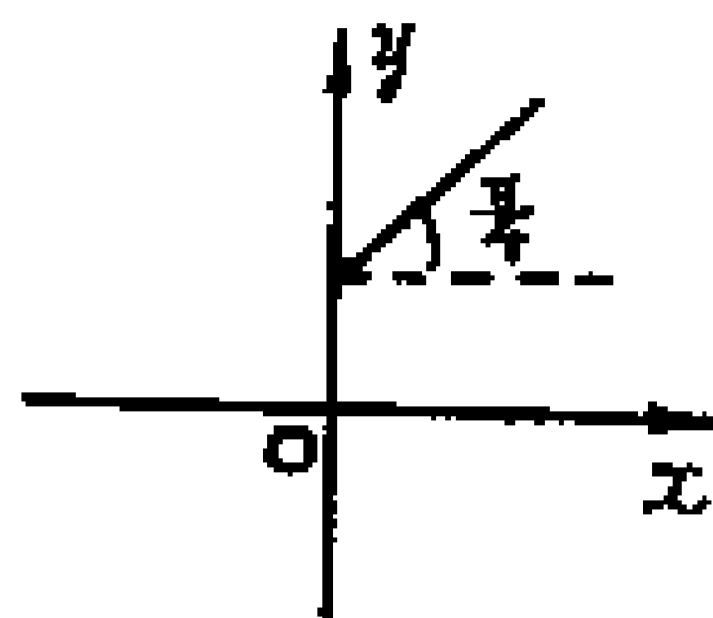
解：上式即 $|z - i| \leq \sqrt{5}$ 因此满足条件的一切点 z 所组成的点集是以点 i 为圆心， $\sqrt{5}$ 为半径的闭圆盘 (图1.6)，它不是区域，而是一个闭区域。

$$(4) |z - 2| + |z + 2| = 5.$$

解：根据复数差的模的几何意义和椭圆的定义，立即可知满足上式的一切点 z 所组成的点集是以点 ± 2 为焦点， $\frac{5}{2}$ 为长半轴的椭圆 (图1.7)。它不是区域。



(图1.7)



(图1.8)

$$(5) \arg(z - i) = \frac{\pi}{4}$$

解：满足上式的一切点 z 所组成的点集是以点 i 为端点，斜率为1的半射线 (不包括端点 i) (图1.8)。它不是区域。

$$(6) |z| < 1, \quad \operatorname{Re} z \leq \frac{1}{2}$$

解：满足条件的一切点 z 所组成的点集是以原点为圆心、

1 为半径的圆盘和以直线 $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ 为右边界的区域（包括

$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ 的公共部分（图1.9） 又因

位于圆盘内的直线 $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ 上的点不是内点，故它不是区域。

$$(7) \quad 0 < |z + 1 + i| < 2.$$

解：满足条件的一切点 z 所组成的点集是以 $-(1+i)$ 为圆心，2 为半径去掉圆心的圆盘（图1.10）。它是多连通区域。

$$(8) \quad \left| \frac{z+1}{z-1} \right| \leq 2$$

解：上式可化为 $|z-1| \leq \frac{1}{2}|z+1|$,

由此可得： $(x + \frac{5}{3})^2 + y^2 \geq (\frac{4}{3})^2$.

因此满足条件的一切点 z 所组成的点集是以 $-\frac{5}{3}$ 为圆心， $\frac{4}{3}$ 为半径的圆盘外所有点的集合（图1.11）。它是闭区域。

$$(9) \quad 0 < \arg(z-1) < \frac{\pi}{4},$$

$$2 < \operatorname{Re} z < 3.$$

解：满足条件的一切点所组成的点集是以直线 $\operatorname{Re} z = 2$, $\operatorname{Re} z = 3$ 为左、右底，以直线 $\arg(z-1) = \frac{\pi}{4}$ 和实轴为上、

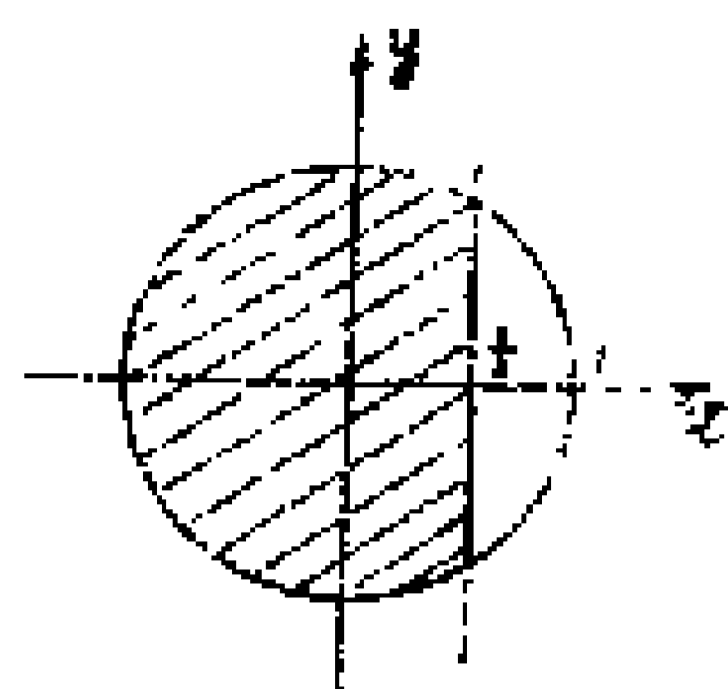


图 (1.9)

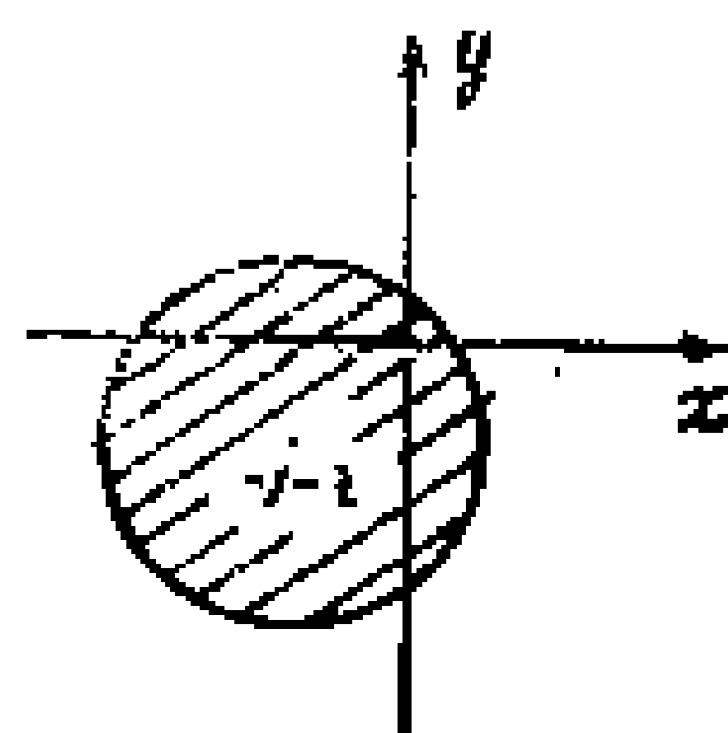


图 (1.10)

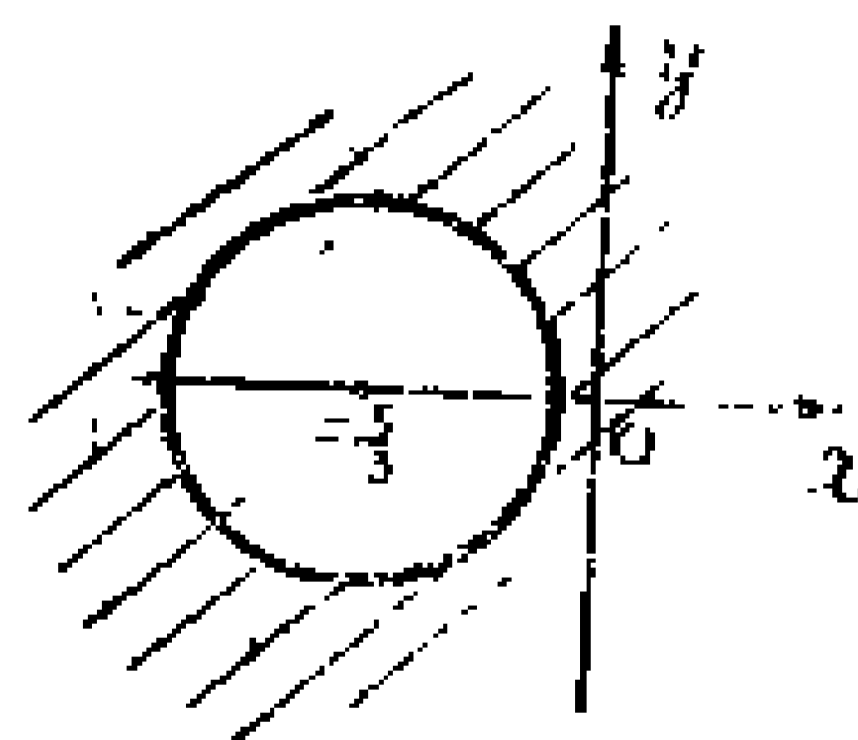


图 (1.11)

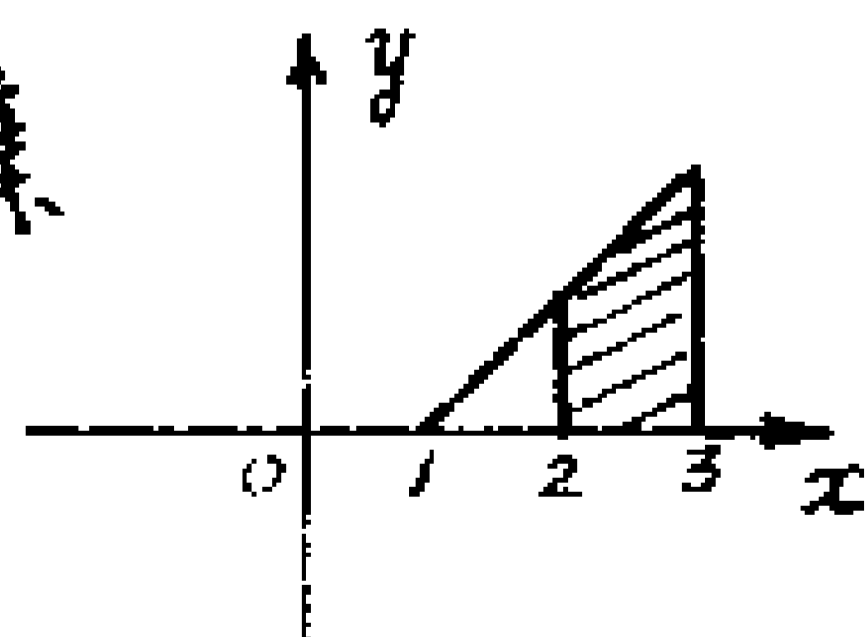
下腰的一个梯形(不包括周界)(图1.12)

它是单连通区域。

证

$$(10) \quad 0 < \arg \frac{z-i}{z+i} < \frac{\pi}{4}$$

区域是开集



解: $\because \frac{z-i}{z+i} = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2} +$ (图1.12)

$$+ i \frac{-2x}{x^2+(y+1)^2} \quad \wedge \quad 0 < \arg \frac{z-i}{z+i} < \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2} > \frac{-2x}{x^2+(y+1)^2} > 0,$$

于是有

$$\begin{cases} -2x > 0, \\ x^2+y^2-1 > 0, \\ -2x < x^2+y^2-1 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} x < 0, \\ x^2+y^2 > 1, \\ (x+1)^2+y^2 > 2. \end{cases}$$

它表示在圆 $(x+1)^2+y^2=(\sqrt{2})^2$ 外且属于左半平面的所有点的集合(图1.13), 它是单连通区域。

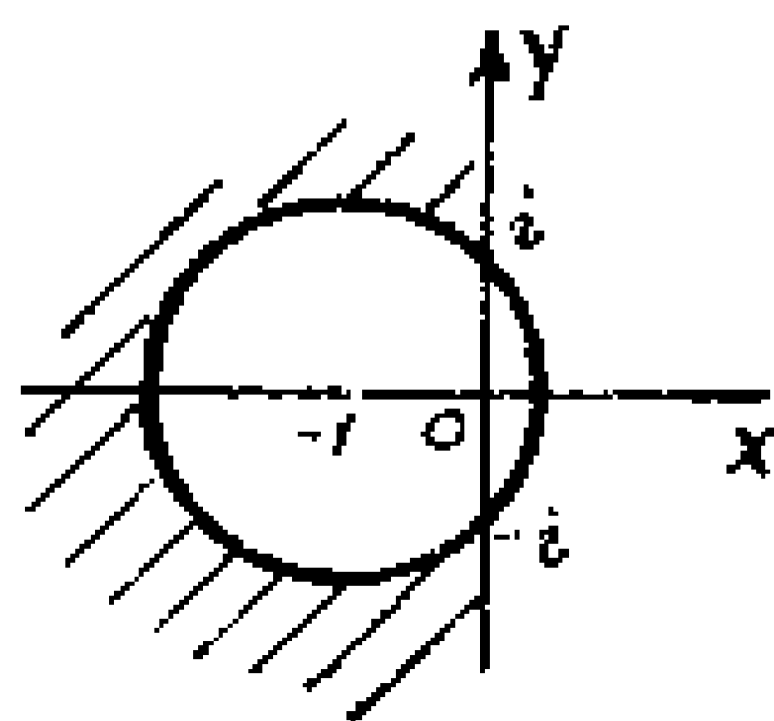


图 (1.13)

第二章 复变函数

1. 试问函数 $\frac{1}{1+z^2}$ 在圆盘 $|z| < 1$ (称为单位圆盘) 内是否连续? 是否一致连续?

解: $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ 在 $|z| < 1$ 内是连续的。根据教材 p.22 最后三行所述性质, 可得这一结论。但也可证明如下:

设 z_0 是 $|z| < 1$ 内任一点, 取 $\delta_0 > 0$, 使 z_0 的 δ_0 邻域 $|z - z_0| < \delta_0$ 完全包含在 $|z| < 1$ 内 (图 2.1)

显然对该邻域内任一点 z 都有:

$$|z| < |z_0| + \delta_0 < 1.$$

$$\therefore |1+z^2| \geq 1 - |z|^2$$

$$\geq 1 - |z| > 1 - (|z_0| + \delta_0) > 0,$$

$$\therefore \frac{1}{|1+z^2|} < \frac{1}{1 - (|z_0| + \delta_0)}.$$

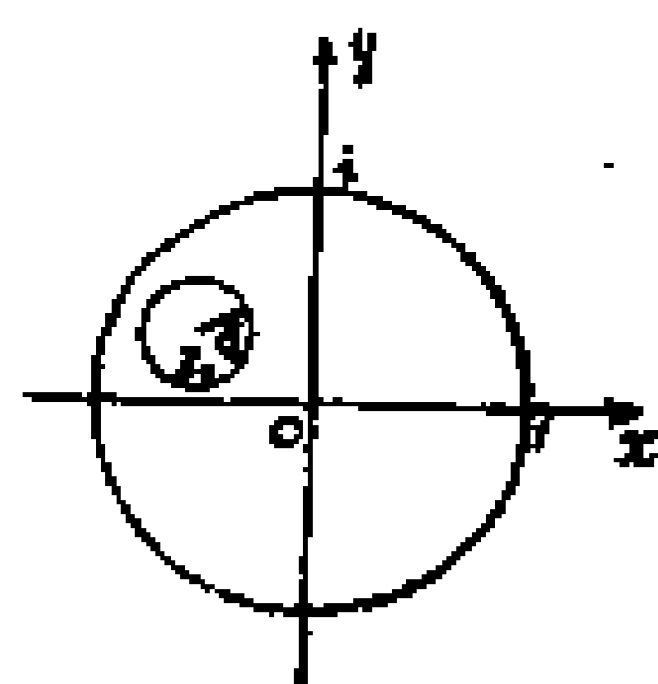


图 (2.1)

$$\text{从而 } |f(z) - f(z_0)| = \frac{|z_0^2 - z^2|}{|1+z_0^2| |1+z^2|}$$

$$\leq \frac{2|z - z_0|}{|1+z_0^2| |1+z^2|} < \frac{2|z - z_0|}{|1+z_0^2| (1 - |z_0| - \delta_0)}$$

由此可见, 若取

$$\delta \leq \min \left[\delta_0, \frac{|1+z_0^2| (1 - |z_0| - \delta_0) \varepsilon}{2} \right]$$

则对预先任意给定的 $\varepsilon > 0$, 只要 $|z - z_0| < \delta$, 就有

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon,$$

$\therefore f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ 在 $z = z_0$ 处连续。

由于 z_0 的任意性可知 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 内连续。

但 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 内不一致连续。因为，若取

$$z_1 = \frac{n}{n+1}i, \quad z_2 = \frac{n-1}{n}i, \quad \text{则 } |z_1 - z_2| = \frac{1}{n(n+1)},$$

可见只要 n 充分大时， $|z_1 - z_2|$ 就可以任意小。而

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{1+z_1^2} - \frac{1}{1+z_2^2} \right| &= \left| \frac{1}{1-\frac{1}{(n+1)^2}} - \frac{1}{1-\frac{1}{n^2}} \right| \\ &= \left| \frac{(n+1)^2}{2n+1} - \frac{n^2}{2n-1} \right| = \left| \frac{2n^2-1}{4n^2-1} \right| \\ &= \frac{1 - \frac{1}{2n^2}}{2 - \frac{1}{2n^2}} \rightarrow \frac{1}{2} \neq 0 \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}). \end{aligned}$$

2. 证明函数 $f(z) = |z|^2$ 除去在 $z = 0$ 外，处处不可微。

证：当 $z_0 = 0$ 时，

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^2}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \bar{z} = 0$$

即 $f(z)$ 在 $z = 0$ 可微。

但当 $z_0 \neq 0$ 时是不可微的，证明如下：

证法一，设 $z = x + iy$ ， $f(z) = u + iv$ ，

由 $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ 有

$$u = x^2 + y^2, \quad v = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{(x_0, y_0)} = 2x_0,$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial y} \right] (x_0, y_0) = 2y_0;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

由于 $z_0 \neq 0$, 故在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 中, x_0, y_0 不能同时为 0。可见, $C-R$ 条件不满足, 所以 $f(z) = |z|^2$ 在 $z_0 \neq 0$ 不可微。

证法二: 设 $z_0 = x_0 + iy_0$ 。若取 $z = x + iy_0$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + y_0^2 - x_0^2 - y_0^2}{x + iy_0 - x_0 - iy_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0. \end{aligned}$$

若取 $z = x_0 + iy$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{x_0^2 + y^2 - x_0^2 - y_0^2}{x_0 + iy - x_0 - iy_0} \\ &= \lim_{y \rightarrow y_0} [-i(y + y_0)] = -2y_0i. \end{aligned}$$

由于 x_0, y_0 不能同时为 0, 所以当 z 分别沿平行于 x 轴和 y 轴的两个方向趋于 z_0 时, $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ 趋于不同的极限

值, 所以 $f(z)$ 在 $z_0 \neq 0$ 不可微。

3. 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 证明: 如果对每一点, $z \in D$, 有 $f'(z) = 0$, 那么 $f(z)$ 在 D 内为常数。

证: 因 $f(z)$ 在 D 内解析, 对任意 $z \in D$ 有, $f'(z) = 0$,

$$\text{故 } f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

于是对任意 $z \in D$,

有 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$. 从而, 在 D 内恒

有 $u(x, y) = c_1, v(x, y) = c_2$ (c_1, c_2 为任意常数). 所以在 D 内, $f(z) = c_1 + ic_2$.

4. 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 证明: 如果 $f(z)$ 满足下列条件之一, 那么它在 D 内为常数

(1) $\operatorname{Re} f(z)$ 或 $\operatorname{Im} f(z)$ 在 D 内为常数;

(2) $|f(z)|$ 在 D 内为常数.

证: (1) 设 $f(z) = u + iv$. 则由条件得:

$u = \operatorname{Re} f(z) = c$ (常数). 故 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

由于 $f(z)$ 在 D 内解析, 可得:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \text{ 因此 } v = c_1 \text{ (常数).}$$

$$\therefore f(z) = c + ic_1$$

同样可证: 当 $\operatorname{Im} f(z) = c$ 时, $f(z)$ 在 D 内为常数.

(2) 设 $f(z) = u + iv$, 则由条件可知, 在 D 内有 $u^2 + v^2 = c$.

若 $c = 0$, 则 $u = v = 0, f(z) = 0$, 结论显然成立.

若 $c \neq 0$, 将 $u^2 + v^2 = c$ 的两边分别对 x, y 求偏导数

$$\text{得: } 2u \frac{\partial u}{\partial x} + 2v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$2u \frac{\partial u}{\partial y} + 2v \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

由于 $f(z)$ 在 D 内解析, 故有:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

代入②式得:

$$2v \frac{\partial u}{\partial x} - 2u \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \cdots \cdots (3)$$

$$\therefore \frac{2u}{2v} \cdot \frac{2v}{-2u} = -4(u^2 + v^2) = -4c \neq 0$$

$$\therefore \text{由①和③得: } \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

$$\text{并立即可得: } \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

$$\therefore u = c_1, \quad v = c_2 \quad (c_1, c_2 \text{ 都是常数}).$$

$$\therefore f(z) = c_1 + ic_2.$$

5. 证明: 若函数 $f(z)$ 在上半平面解析, 那么函数 $f(\bar{z})$ 在下半平面解析.

证法一: 设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ($y > 0$).

$\because f(z)$ 在上半面解析,

$\therefore u(x, y), v(x, y)$ 在上半平面可微, 且

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{而 } f(\bar{z}) = u(x, -y) - iv(x, -y)$$

作为定义在下半平面的函数, 应有 $y < 0$. $f(\bar{z})$ 的实部 $u(x, -y)$ 可视为两个可微函数 $u(x, Y)$ 和 $Y = -y$ 的复合函

数, 因而在下半平面可微; 同理 $f(\bar{z})$ 的虚部 $-v(x, -y)$

也在下半平面可微, 并且根据①有

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x, -y)}{\partial x} &= \frac{\partial u(x, Y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, Y)}{\partial Y} = \frac{\partial v(x, Y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial Y} \\ &= \frac{\partial v(x, -y)}{\partial y} \cdot (-1) = -\frac{\partial[-v(x, -y)]}{\partial y},\end{aligned}$$

类似地可推得: $\frac{\partial u(x, -y)}{\partial y} = -\frac{\partial[-v(x, -y)]}{\partial x}$

$\therefore f(\bar{z})$ 在下半平面内解析。

证法二: 设 $F(z) = f(\bar{z})$, 在下半平面内任取一点 z_0 , z 是下半平面内异于 z_0 的点, 则由 $\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$ 可得:

$$F'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0}$$

$$= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

$$= \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ \frac{f(z) - f(z_0)}{\overline{z - z_0}} \right\}$$

$$= \left\{ \lim_{\overline{z} \rightarrow \overline{z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{\overline{z - z_0}} \right\}$$

其中 $\overline{z_0}$, \overline{z} 在上半平面内, 由于 $f(z)$ 在上半平面内解析, 因此有:

$F'(z_0) = f'(\overline{z_0})$. 故 $F(z) = f(\overline{z})$ 在下半平面内解析。

6. 试利用 $C-R$ 条件, 证明下列函数在复平面上解析:

$$z^2, e^z, \sin z, \cos z;$$

而下列函数不解析:

$$\overline{z}^2, e^{\overline{z}}, \sin \overline{z}, \cos \overline{z}.$$

证: 设 $z = x + iy$, 则

$$z^2 = x^2 - y^2 + i2xy, \quad u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

$$\text{在复平面上: } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y.$$

显然偏导数均连续、因此 $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$ 可微且满足 $C-R$ 条件, 故 z^2 在复平面上解析。

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y), \quad u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y.$$

在复平面上:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -e^x \sin y.$$

由此可见: u, v 可微且满足 $C-R$ 条件, 故 e^z 在复平面上解析。

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \sinh y \cos x,$$

$$u = \sin x \cosh y, \quad v = \cos x \sinh y.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \cos x \cosh y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \sin x \sinh y$$

由此可见: u, v 可微且满足 $C-R$ 条件, 故 $\sin z$ 在复平面上解析。

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y,$$

$$u = \cos x \cosh y, \quad v = \sin x \sinh y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\sin x \cosh y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \cos x \sinh y.$$

由此可见: u, v 可微且满足 $C-R$ 条件。故 $\cos z$ 在复平面上解析。

$$\bar{z}^2 = x^2 + y^2 - i2xy, \quad u = x^2 + y^2, \quad v = -2xy.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2x.$$

可见: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ 在复平面上除 $x=0$ 外均不成立, 故

\bar{z}^2 在复平面上不解析。

$$e^{\bar{z}} = e^x (\cos y - i \sin y) \quad u = e^x \cos y, \quad v = -e^x \sin y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -e^x \sin y.$$

只当 $y = k\pi + \frac{\pi}{2} (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时才有 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$.

由此可见: $e^{\bar{z}}$ 在复平面上不解析。

$$\sin \bar{z} = \sin x \cosh y - i \cos x \sinh y,$$

$$u = \sin x \cosh y, \quad v = -\cos x \sinh y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \cosh y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\cos x \sinh y.$$

只当 $x = k\pi + \frac{\pi}{2} (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时才有 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$,

可见 $\sin \bar{z}$ 在复平面上不解析。

$$\cos \bar{z} = \cos x \cosh y + i \sin x \sinh y.$$

$$u = \cos x \cosh y, \quad v = \sin x \sinh y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\sin x \cosh y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \sin x \cosh y.$$

可见: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ 在 z 平面上除 $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

外都不成立, 故 $\cos \bar{z}$ 在复平面上不解析。

7. 证明在极坐标下的柯西—黎曼条件是:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r \frac{\partial v}{\partial r}.$$

证: 设 $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$,

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

$$\text{则 } \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta;$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial y} \cos \theta - \frac{\partial v}{\partial x} \sin \theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial u}{\partial x} r \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial y} r \cos \theta;$$

$$-r \frac{\partial u}{\partial r} = -r \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta \right)$$

因此由在直角坐标下的 $C-R$ 条件可得:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r \frac{\partial v}{\partial r}.$$

反之, 由 $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$, $\frac{\partial u}{\partial \theta} = -r \frac{\partial v}{\partial r}$,

并利用 (•) 可得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta &= \frac{\partial v}{\partial y} \cos \theta - \frac{\partial v}{\partial x} \sin \theta, \\ -\frac{\partial u}{\partial x} r \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial y} r \cos \theta \\ &= -r \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial v}{\partial y} \sin \theta \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{即: } \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cos \theta + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \sin \theta &= 0, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cos \theta - \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sin \theta &= 0. \end{aligned}$$

$\because \cos \theta$ 与 $\sin \theta$ 不能同时为 0.

$$\therefore \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & -\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{即: } \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = 0.$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

由此可知, 在极坐标下的 $C-R$ 条件为:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r \frac{\partial v}{\partial r}.$$

8. 下章将要证明: 在任何区域 D 内解析函数 $f(z)$ 一定有任意阶导数。由此证明:

(1) $f(z)$ 的实部和虚部在 D 内也有任意阶导数, 并且满足拉普拉斯方程:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0;$$

(2) 在 D 内, $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2 = 4|f'(z)|^2$.

证: (1) $\because f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在 D 内有导数,
 $\therefore f(z)$ 的实部 $u(x, y)$ 和虚部 $v(x, y)$ 的偏导数存在,
 且 $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$. 又 $f'(z)$ 在 D
 内有导数, 而 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, -\frac{\partial u}{\partial y}$ 分别为 $f'(z)$
 的实部和虚部. 所以 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, -\frac{\partial u}{\partial y}$ 均有偏导
 数, 这就表明 $f(z)$ 的实部和虚部有二阶偏导数.

因为 $f(z)$ 在 D 内有任意阶偏导数, 故可类似推出 $f(z)$ 的
 实部和虚部在 D 内也有任意阶偏导数.

$$\begin{aligned} \text{又 } f''(z) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) - i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

比较上式的实部和虚部得到:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \text{即 } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad \text{即 } \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

(2) 令 $f(z) = u + iv$, 则 $|f(z)|^2 = u^2 + v^2$.

$$\begin{aligned} \text{左端} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^2 + v^2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(u^2 + v^2) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(2u \frac{\partial u}{\partial x} + 2v \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial}{\partial y} \left(2u \frac{\partial u}{\partial y} + 2v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\
& = 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \\
& + 2v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\
& + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\
& = 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \\
& + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \\
& + 2v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\
& = 4 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \\
& = 4 |f'(z)|^2 = \text{右端},
\end{aligned}$$

故原等式成立。

9. 求出 e^{2+i} , $\text{Ln}(1+i)$, i^i , $1^{\sqrt{2}}$, $(-2)^{\sqrt{2}}$ 的值。

解: $e^{2+i} = e^2(\cos 1 + i \sin 1)$

$\text{Ln}(1+i) = \ln|1+i| + i[\arg(1+i) + 2k\pi]$

$$= \frac{1}{2} \ln 2 + i \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$i^i = e^{i \text{Ln} i} = e^{i \left[\ln i + i \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \right]}$$

$$= e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right)} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$\begin{aligned}
 1^{\sqrt{2}} &= e^{\sqrt{2} \operatorname{Ln} 1} = e^{\sqrt{2} (1^{\pi} 1 + i 2 k \pi)} = e^{1^{\sqrt{2}} \sqrt{2} k \pi} \\
 &= \cos(2\sqrt{2} k \pi) + i \sin(2\sqrt{2} k \pi) \\
 &\quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (-2)^{\sqrt{2}} &= e^{\sqrt{2} \operatorname{Ln} (-2)} = e^{\sqrt{2} [1^{\pi} 2 + i (\pi + 2 k \pi)]} \\
 &= e^{\sqrt{2} 1^{\pi} 2} \{ \cos[\sqrt{2} (2k+1)\pi] + \\
 &\quad + i [\sin \sqrt{2} (2k+1)\pi] \} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).
 \end{aligned}$$

10. 由 $z = \sin w$ 及 $z = \cos w$ 所定义的函数 w 分别称为 z 的反正弦函数及反余弦函数, 求出它们的解析表达式 (利用对数函数)。

解: 已知 $z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$,

$$\therefore e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0.$$

利用一元二次方程求根公式解得:

$$e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2} \quad \text{即} \quad iw = \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}),$$

$$\therefore w = \arcsin z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}).$$

利用同样的方法解得:

$$w = \arccos z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

11. 由 $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ 及 $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ 所定义的函数分别称为双曲正弦函数和双曲余弦函数. 证明:

$$\sinh iz = i \sin z, \quad \cosh iz = \cos z.$$

由此从关于三角函数的有关公式导出:

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1,$$

$$\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2,$$

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2,$$

$$\sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y,$$

$$\cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y,$$

$$\frac{d}{dz} \sin hz = \cos hz, \quad \frac{d}{dz} \cos hz = -\sin hz.$$

$$\text{又: } \sin hz = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = i \frac{e^{-i(iz)} - e^{i(iz)}}{2i} \\ = -i \sin(iz).$$

$$\cos hz = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{e^{-i(iz)} + e^{i(iz)}}{2} = \cos iz.$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = \cos^2 iz + \sin^2 iz = 1.$$

$$\sinh(z_1 + z_2) = -i \sin(iz_1 + iz_2)$$

$$= -i(\sin iz_1 \cos iz_2 + \cos iz_1 \sin iz_2)$$

$$= \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$$

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cos i(z_1 + z_2)$$

$$= \cos iz_1 \cos iz_2 - \sin iz_1 \sin iz_2$$

$$= \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2.$$

$$\sin(x+iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy$$

$$= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.$$

$$\cos(x+iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy$$

$$= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y.$$

$$\therefore \sin hz = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

$$\therefore \frac{d}{dz} \sin hz = \frac{d}{dz} \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z.$$

$$\text{又 } \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

$$\therefore \frac{d}{dz} \cosh z = \frac{d}{dz} \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sinh z.$$

12. 设两个实变数的函数 $u(x, y)$ 有偏导数, 这一函数可写成 $z = x + iy$ 及 \bar{z} 的函数

$$u = u\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right),$$

再把 z 和 \bar{z} 看作是相互独立的, 证明:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

设复变函数 $f(z)$ 的实部及虚部分别是 $u(x, y)$ 及 $v(x, y)$, 并且它们都有偏导数. 求证: 对于 $f(z)$, 柯西黎曼条件可写成

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial z} + i \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

证: 由于 $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.

根据复合函数求偏导数法则, 有:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial u}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial u}{\partial y}.$$

设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, 由于 $f(z)$ 的实部 $u(x, y)$, 虚部 $v(x, y)$ 都有偏导数, 故由方才所证知:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial z} + i \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial u}{\partial y} + i \left(\frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).
\end{aligned}$$

按 $C-R$ 条件 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, 故对 $f(z)$,

$$C-R \text{ 条件可写成: } \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = 0.$$

13. 设函数 $f\left(\frac{1}{z}\right)$ 在 $z=0$ 解析, 那么我们说 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 解析。下列函数中, 那些在无穷远点解析?

$$e^z, \quad \ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right), \quad \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n}, \quad \frac{\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}$$

解: 设 $f(z) = e^z$, 则 $f\left(\frac{1}{z}\right) = e^{\frac{1}{z}}$, 取 $z = x$,

$$\lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (x > 0)}} e^{\frac{1}{x}} = \infty,$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (x < 0)}} e^{\frac{1}{x}} = 0,$$

$$\therefore \lim_{z \rightarrow 0} e^{\frac{1}{z}} \text{ 不存在.}$$

故 $e^{\frac{1}{z}}$ 在 $z=0$ 处不解析, 即 e^z 在 $z=\infty$ 处不解析。

$$\begin{aligned}\text{设 } f\left(\frac{1}{z}\right) &= \operatorname{Ln} \frac{\frac{1}{z} + 1}{\frac{1}{z} - 1} = \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z} \\ &= \operatorname{Ln}(1+z) - \operatorname{Ln}(1-z),\end{aligned}$$

因为 $\operatorname{Ln}(1+z)$ 与 $\operatorname{Ln}(1-z)$ 都是多值解析函数, $z=0$ 不是枝点, $f\left(\frac{1}{z}\right)$ 的每一个单值分枝在 $z=0$ 处是解析的.

故 $f(z) = \operatorname{Ln}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ 的每一个单值分枝在 $z=\infty$ 是解析的.

$$\begin{aligned}\text{设 } f\left(\frac{1}{z}\right) &= \frac{a_0 + a_1 \frac{1}{z} + \cdots + a_m \frac{1}{z^m}}{b_0 + b_1 \frac{1}{z} + \cdots + b_n \frac{1}{z^n}} \\ &= z^{n-m} \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_m}{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n}.\end{aligned}$$

当 $m \leq n$ 时, $f\left(\frac{1}{z}\right)$ 在 $z=0$ 处是解析的, 故所给有理函数在 $z=\infty$ 处是解析的; 当 $m > n$ 时, $f\left(\frac{1}{z}\right)$ 在 $z=0$ 处不解析, 故所给有理函数在 $z=\infty$ 处不解析.

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\sqrt{\frac{1}{z}}}{1 + \sqrt{\frac{1}{z}}} = \frac{1}{1 + \sqrt{z}} \text{ 在 } z \text{ 平面上是双值函数,}$$

$z=0$ 为枝点, 它的两个单值分枝在 $z=0$ 不解析.

$$\therefore f(z) = \frac{\sqrt{z}}{1 + \sqrt{z}} \text{ 在 } z=\infty \text{ 处不解析.}$$

14. 在复平面上取上半虚轴作割线。试在所得区域内分别取定函数 \sqrt{z} 和 $\operatorname{Ln} z$ 在正实轴分别取正实值和实值的一个解析分枝，并求它们在上半虚轴左沿的点及右沿的点 $z=i$ 处的值。

解： $\sqrt{z} = \sqrt{|z|} e^{i \frac{\arg z + 2k\pi}{2}}$ 在正实轴上取正实值的一个解析分枝为：

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|} e^{i \frac{\arg z}{2}} \quad \left(\frac{\pi}{2} - 2\pi < \arg z < \frac{\pi}{2} \right).$$

$$\text{在右沿点 } z=i \text{ 处, } \sqrt{i} = e^{i \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).$$

$$\text{在左沿点 } z=i \text{ 处, } \sqrt{i} = e^{-i \frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).$$

$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \arg z + 2k\pi i$ ，在正实轴取实值的一个解析分枝为：

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \arg z \quad \left(\frac{\pi}{2} - 2\pi < \arg z < \frac{\pi}{2} \right).$$

$$\text{在左沿点 } z=i \text{ 处, } \operatorname{Ln} i = \ln 1 + i \left(-\frac{3\pi}{2} \right) = -\frac{3}{2}\pi i.$$

$$\text{在右沿点 } z=i \text{ 处, } \operatorname{Ln} i = \ln 1 + i \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} i.$$

15. 在复平面上取正实轴作割线。试在所得区域内：

(1) 取定函数 z^a ($-1 < a < 0$) 在正实轴上沿取正实值的一个解析分枝，并求这一分枝在 $z=-1$ 处的值，在正实轴下沿的值。(2) 取定函数 $\operatorname{Ln} z$ 在正实轴上沿取实值的一个解析分枝，并求这一分枝在 $z=-1$ 处的值，在正实轴下沿

的值.

$$\begin{aligned}\text{解: (1) } z^a &= e^{a \operatorname{Ln} z} = e^{a(\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi))} \\ &= e^{a \ln|z|} \cdot e^{i a (\arg z + 2k\pi)} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).\end{aligned}$$

在正实轴上沿取实值的一个解析分枝为:

$$z^a = e^{a \ln|z|} e^{i a \arg z} \quad (0 < \arg z < 2\pi).$$

此分枝在 $z = -1$ 处:

$$(-1)^a = e^{a \ln|-1|} e^{i a \pi} = \cos a\pi + i \sin a\pi.$$

在正实轴下沿点 $z = x$ 处的值为:

$$x^a = e^{a \ln x} e^{i 2a\pi} = e^{a \ln x} (\cos 2a\pi + i \sin 2a\pi).$$

(2) 因为 $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \arg z + 2k\pi i$, 所以 $\operatorname{Ln} z$ 在正实轴上沿取实值的解析分枝为:

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z \quad (0 < \arg z < 2\pi).$$

此分枝在 $z = -1$ 处, $\ln(-1) = \ln|-1| + i\pi = \pi i$.

在正实轴下沿点 $z = x$ 处的值为:

$$\ln x = \ln|x| + 2\pi i = \ln x + 2\pi i.$$

16. 求函数 $\sqrt{(1-z)(1-k^2 z^2)}$ ($0 < k < 1$) 的枝点.

证明它在线段:

$$-\frac{1}{k} \leq x \leq -1, \quad 1 \leq x \leq \frac{1}{k}$$

的外部, 能分成解析分枝, 并求在 $z = 0$ 取正值的那个分枝.

$$\begin{aligned}\text{解: } w = f(z) &= \sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)} \\ &= \sqrt{(1-z)(1+z)(1-kz)(1+kz)} \\ &= k \sqrt{(z-1)(z+1)\left(z-\frac{1}{k}\right)\left(z+\frac{1}{k}\right)} \\ &\quad (0 < k < 1).\end{aligned}$$

设在 z_1 处有起始值:

$$\begin{aligned} z_1 - 1 &= r_1 e^{i\theta_1}, & z_1 + 1 &= r_2 e^{i\theta_2} \\ z_1 - \frac{1}{k} &= r_3 e^{i\theta_3}, & z_1 + \frac{1}{k} &= r_4 e^{i\theta_4}. \end{aligned}$$

从而 $f(z) = \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$ 的起始值 w_1 为:

$$k\sqrt{r_1 r_2 r_3 r_4} e^{i \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4}{2}} = w_1.$$

下面求枝点: 由于 \sqrt{z} 的枝点是0和 ∞ , 所以所给函数可能有枝点 ± 1 , $\pm \frac{1}{k}$ 和 ∞ .

当 z 依逆时针方向沿任一条不经过 ± 1 , $\pm \frac{1}{k}$, 并在其内部包含点 $z=1$ 而不包含其它三点的简单闭曲线连续变动回到原来位置时, θ_1 变为 $\theta_1 + 2\pi$, $\theta_2, \theta_3, \theta_4$ 不变。起始值 w_1 变为

$$k\sqrt{r_1 r_2 r_3 r_4} e^{i \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + 2\pi}{2}} = -w_1.$$

所以 $z=1$ 是 w 的枝点,

类似地, 可以说明 $z=-1, z=\pm \frac{1}{k}$ 也是 $w=f(z)$ 的枝点。

又当 z 依逆时针方向沿任一条不经过 $\pm 1, \pm \frac{1}{k}$, 但其内部包含这四个枝点的简单闭曲线连续变动回到原来位置时, $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 和 θ_4 的值都增加 2π 。

因此

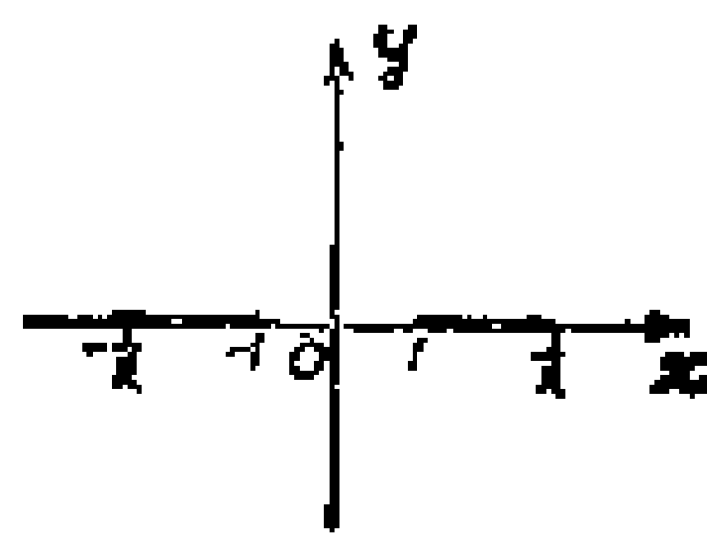
$$w = k\sqrt{r_1 r_2 r_3 r_4} e^{i \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + 8\pi}{2}} = w_1.$$

故 $z=\infty$ 不是 $w=f(z)$ 的枝点。

类似地，可以证明：若简单闭曲线内部恰含两个枝点，则点 z 依逆时针方向沿曲线连续变动一周时，函数值也不改变。

所以在复平面上作割线：

$$-\frac{1}{k} \leq x \leq -1, \quad 1 \leq x \leq \frac{1}{k},$$



(图2.2)

如图2.2，在所得的区域内，可把 $w = f(z)$ 分成连续分枝，而这些分枝又都是解析的。因此在 $-\frac{1}{k} \leq x \leq 1, 1 \leq x \leq \frac{1}{k}$ 的外部（记作 D ），所给函数能分成两个解析分枝：

$$w_l = k \sqrt{r_1 r_2 r_3 r_4} e^{i \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + 2l\pi}{2}} \quad (l = 0, 1).$$

即 $w_l = |(1-z^2)(1-k^2 z^2)|^{\frac{1}{2}} \cdot$

$$e^{i \frac{1}{2} [\arg(1-z^2) + \arg(1-k^2 z^2) + 2l\pi]} \quad (z \in D).$$

已知 $z = 0$ 时， w 为正值。

即 $w_l = |(1-0)(1-0)|^{\frac{1}{2}} e^{i \frac{\arg(1-0) + \arg(1-0) + 2l\pi}{2}}$
 $= e^{i l \pi} = \text{正值} \therefore l = 0.$

故在 $z = 0$ 取正值的那个分枝为：

$$w_0 = |(1-z^2)(1-k^2 z^2)|^{\frac{1}{2}} e^{i \frac{1}{2} [\arg(1-z^2) + \arg(1-k^2 z^2)]}.$$

17. 研究函数

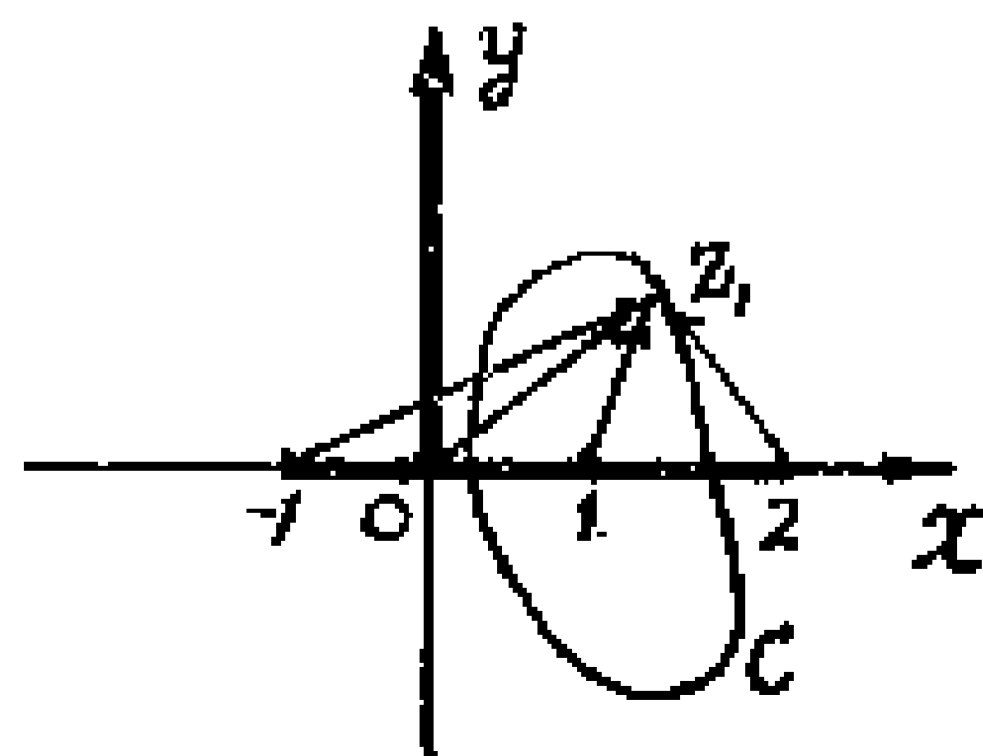
$$w = \sqrt[3]{\frac{(z+1)(z-1)(z-2)}{z}}$$
 的枝点，并在割线：

$-1 \leq x \leq 2 (y=0)$ 及 $y > 0 (x=0)$ 的外部区域内, 求解析分枝 ($z=3, w>0$) 在上半虚轴右沿点和左沿点 $z=i$ 处的值。

解: 我们知道,

$$w = \left| \frac{(z+1)(z-1)(z-2)}{z} \right|^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i}{3} [\operatorname{Arg}(z+1) - \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg}(z-1) + \operatorname{Arg}(z-2)]}.$$

先求支点。任作一条简单连续闭曲线 C , 使其不经过 $-1, 0, 1$ 及 2 , 并使其内区域含 1 , 但不含 $-1, 0$ 及 2 。设 z_1 是 C 上一点。取定 $\operatorname{Arg}(z+1), \operatorname{Arg} z, \operatorname{Arg}(z-1)$ 及 $\operatorname{Arg}(z-2)$ 在这点的值 $\arg(z_1+1), \arg z_1, \arg(z_1-1)$ 及 $\arg(z_1-2)$ (图2.3)。当 z 从 z_1 按反时针方向沿 C 连续变动一周



(图2.3)

时, 通过连续变动, $\arg(z_1+1), \arg z_1$ 及 $\arg(z_1-2)$ 没有变化, $\arg(z_1-1)$ 增加了 2π 。于是 w 在 z_1 的值就从

$$\left| \frac{(z_1+1)(z_1-1)(z_1-2)}{z_1} \right|^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i}{3} [\arg(z_1+1) - \arg z_1 + \arg(z_1-1) + \arg(z_1-2)]} = w_1$$

连续变动到

$$\left| \frac{(z_1+1)(z_1-1)(z_1-2)}{z_1} \right|^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i}{3} [\arg(z_1+1) - \arg z_1 + \arg(z_1-1) + 2\pi + \arg(z_1-2)]} \neq w_1.$$

因此 1 是函数 w 的支点; 同样可证明 $-1, 0$ 及 2 也是它的

支点。任作一条简单连续闭曲线，使其内区域含 $-1, 0, 1$ 及 2 ，可证明 ∞ 是函数 w 的支点。

因此，在复平面上沿实轴作割线 $-1 \leq x \leq 2 (y=0)$ 和沿虚轴作割线 $y > 0 (x=0)$ ，如图 (2.3)，则在所得区域 D 内，可把 w 分成解析分支。

在 $z=3$ ，取 $\arg(z+1)=0$ ， $\arg z=0$ ， $\arg(z-1)=0$ ， $\arg(z-2)=0$ 。于是在 D 内， w 可分成三个解析分支：

$$w = \left| \frac{(z+1)(z-1)(z-2)}{z} \right|^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i}{3} [\arg(z+1) - \arg z + \arg(z-1) + \arg(z-2) + 2k\pi]} (k=0, 1, 2).$$

由假设 $z=3$ 处， $w > 0$ ，可见这一分支是

$$w = \left| \frac{(z+1)(z-1)(z-2)}{z} \right|^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i}{3} [\arg(z+1) - \arg z + \arg(z-1) + \arg(z-2)]}$$

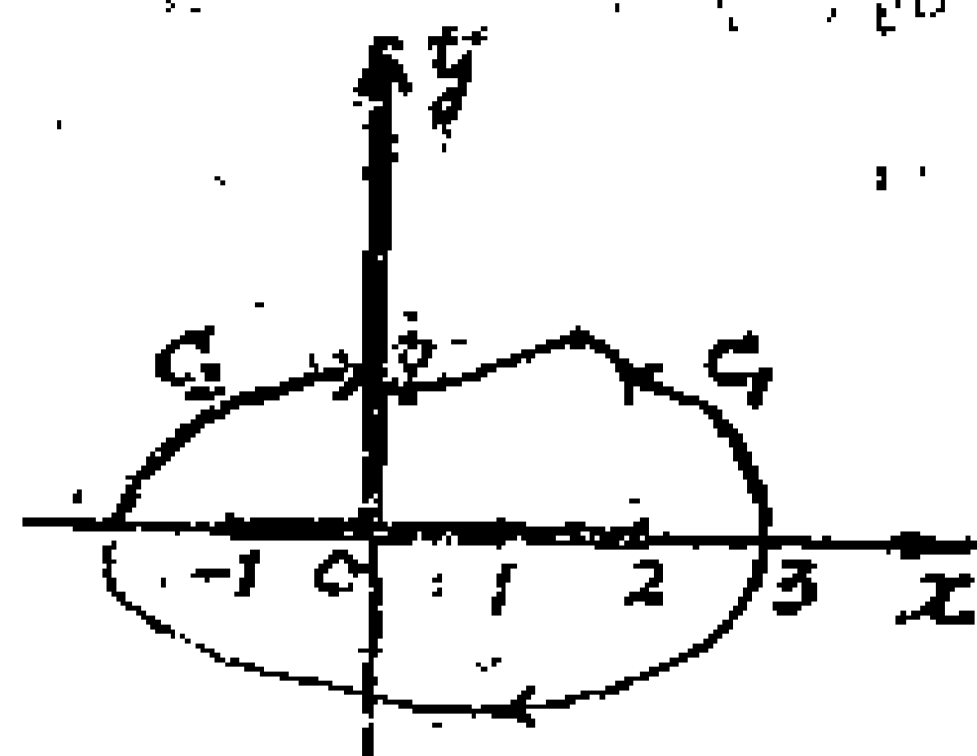
在区域 D 内，如图 (2.4)，

当 z 从 3 沿曲线 c_1 连续变动到上半虚轴右沿点之时， $\arg(z+1)$ 增加了 $\frac{\pi}{4}$ ， $\arg z$ 增加了 $\frac{\pi}{2}$ ， $\arg(z-1)$

增加了 $\frac{3\pi}{4}$ ， $\arg(z-2)$ 增加了

$\pi - \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$ 。

故在上半虚轴右沿点之处， $\arg(z+1) = \frac{\pi}{4}$ ，



(图2.4)

$$\arg z = \frac{\pi}{2}, \quad \arg(z-1) = \frac{3\pi}{4}, \quad \arg(z-2)$$

$= \pi - \arctan \frac{1}{2}$. 因此 w 的所求分支在上半虚轴右沿点 i 处的值是

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} e^{\frac{i}{3} \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} + \pi - \arctan \frac{1}{2} \right]} \\ &= \sqrt[3]{20} e^{\frac{i}{3} \left[\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{2} \right) \right]} = \sqrt[3]{20} e^{\frac{i}{3} \left(\pi + \arctan \frac{1}{2} \right)}. \end{aligned}$$

依上述同样的方法, 可得在上半虚轴左沿点处,

$$\arg(z+1) = -\frac{7\pi}{4}, \quad \arg z = -\frac{3\pi}{2}, \quad \arg(z-i) = -\frac{5\pi}{4},$$

$$\arg(z-2) = -\pi - \arctan \frac{1}{2}.$$

因此 w 的所求分支在上半虚轴左沿点 i 处的值是

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{20} e^{\frac{i}{3} \left(-\frac{7\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} - \frac{5\pi}{4} - \pi - \arctan \frac{1}{2} \right)} \\ &= \sqrt[3]{20} e^{\frac{i}{3} \left(-3\pi + \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{2} \right)} = -\sqrt[3]{20} e^{\frac{i}{3} \arctan \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

18. 找出下列推理的错误: 因为 $(-z)^2 = z^2$,

所以 $2\operatorname{Ln}(-z) = 2\operatorname{Ln}z$, 因此 $\operatorname{Ln}(-z) = \operatorname{Ln}z$.

解: 此结论是错误的.

$$\because \operatorname{Ln}z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi),$$

$$\operatorname{Ln}(-z) = \ln|-z| + i[\arg z + (2k+1)\pi].$$

显然, $\operatorname{Ln}z$ 与 $\operatorname{Ln}(-z)$ 的值没有一个对应相等. 推论的错误在于: 由 $(-z)^2 = z^2$, 按对数函数的性质, 固然可以推出 $\operatorname{Ln}(-z)^2 = \operatorname{Ln}z^2$, 但 $\operatorname{Ln}z^2 \neq 2\operatorname{Ln}z$. 因而不能由此推出: $2\operatorname{Ln}(-z) = 2\operatorname{Ln}z$.

第三章 复变函数的积分

1. 分别计算沿着 (1) 直线段; (2) 单位圆 ($|z|=1$) 的左半圆; (3) 单位圆的右半圆的下列积分:

$$I = \int_{-i}^i |z| dz.$$

解: 如图 3.1.

(1) 把从 $-i$ 到 i 的直线方程写作 $z = it$, $-1 \leq t \leq 1$, 则

$$|z| = |t| = \begin{cases} -t, & -1 \leq t < 0 \text{ 时}; \\ t, & 0 \leq t \leq 1 \text{ 时}. \end{cases}$$

$$dz = i dt.$$

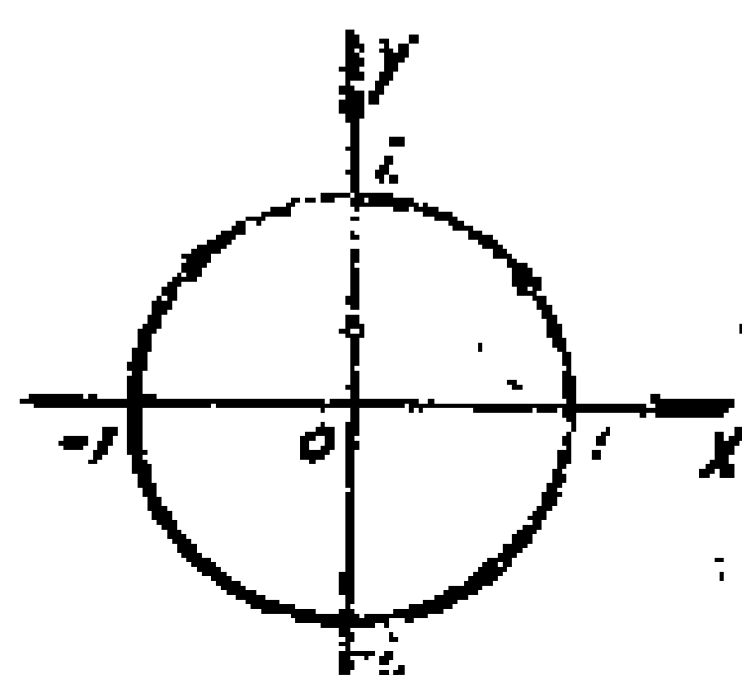


图 3.1

图 3.1

$$\begin{aligned} \text{所以 } I &= \int_{-i}^0 |z| dz + \int_0^i |z| dz \\ &= \int_{-1}^0 (-t) i dt + \int_0^1 t i dt = 2i \int_0^1 t dt \\ &= i t^2 \Big|_0^1 = i. \end{aligned}$$

(2) 把单位圆的左半圆的方程写作 $z = e^{i\theta}$,

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}. \text{ 则 } dz = i e^{i\theta} d\theta, \text{ 而 } |z| = 1.$$

所以
$$I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} i e^{i\theta} d\theta = e^{i\theta} \Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2i.$$

(3) 把单位圆的右半圆的方程写作 $z = e^{i\theta}$,

$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, 则 $dz = i e^{i\theta} d\theta$, 而 $|z| = 1$.

所以
$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} i e^{i\theta} d\theta = e^{i\theta} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2i.$$

2. 计算积分:

$$I = \int_L \operatorname{Re} z dz,$$

在这里 L 分别表示: (1) 单位圆 (按反时针方向从 1 到 1 取积分); (2) 从 z_1 沿直线段到 z_2 .

解: (1) 如图 3.2,

令 $z = \cos\theta + i\sin\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

则 $\operatorname{Re} z = \cos\theta$,

$dz = (-\sin\theta + i\cos\theta) d\theta$.

所以
$$I = \int_0^{2\pi} \cos\theta (-\sin\theta + i\cos\theta) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\cos\theta \sin\theta + i \frac{1 + \cos 2\theta}{2}) d\theta$$

$$= \left[-\frac{\sin^2\theta}{2} + i \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right) \right]_0^{2\pi} = \pi i.$$

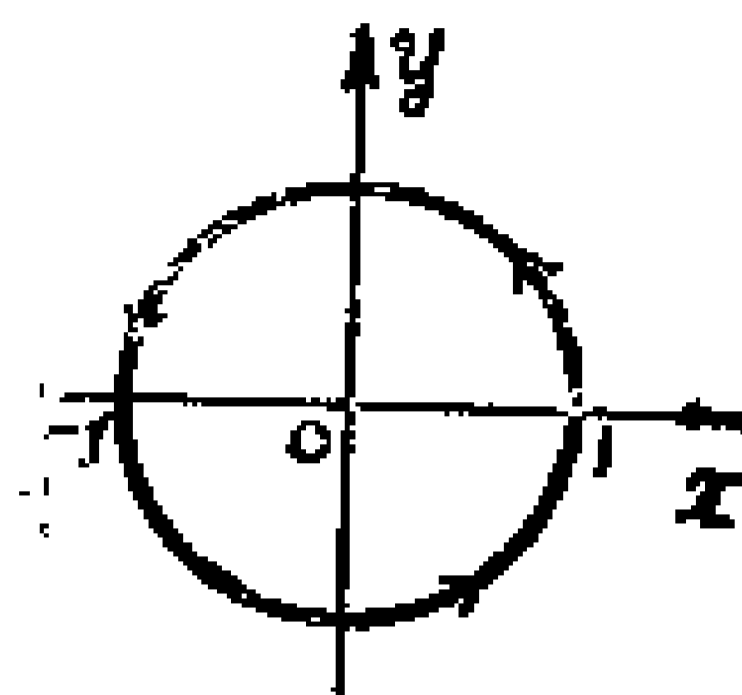


图 3.2

(2) 设连接 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ 两点的直线段方程是:

$$z = z_1 + (z_2 - z_1)t, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

则 $\operatorname{Re} z = x_1 + (x_2 - x_1)t$, $dz = (z_2 - z_1)dt$.

$$\begin{aligned} \text{所以 } I &= \int_0^1 \left[x_1 + (x_2 - x_1)t \right] (z_2 - z_1) dt \\ &= \frac{1}{2} (z_2 - z_1) (x_2 + x_1). \end{aligned}$$

3. 设函数 $f(z)$ 当 $|z - z_0| > r_0$ ($0 < r_0 < r$) 时是连续的, 令 $M(r)$ 表示 $|f(z)|$ 在 $|z - z_0| = r > r_0$ 上的最大值, 并且假定,

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} rM(r) = 0.$$

试证明,

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{k_r} f(z) dz = 0.$$

在这里 k_r 是圆 $|z - z_0| = r$.

证: $\because f(z)$ 在 $|z - z_0| > r_0$ 内连续, 又 k_r 的半径 $r > r_0$.

\therefore 积分 $\int_{k_r} f(z) dz$ 存在.

于是根据积分的基本性质 (5), 有:

$$\left| \int_{k_r} f(z) dz \right| \leq M(r) \cdot 2\pi r = 2\pi [rM(r)].$$

而 $\lim_{r \rightarrow +\infty} rM(r) = 0$, 故由上式即得:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{k_r} f(z) dz = 0.$$

4. 如果满足上题中条件的函数 $f(z)$ 还在 $|z - z_0| > r_0$ 内

解析, 那么对任何 $r > r_0$,

$$\int_{k_r} f(z) dz = 0.$$

证: 任取 r_1, r , 使 $r_1 > r > r_0 > 0$. 由假设可知 $f(z)$ 在 k_{r_1} 与 k_r 所围成的闭圆环域上解析, 故由多连通区域的柯西定理, 得:

$$\int_{k_r} f(z) dz = \int_{k_{r_1}} f(z) dz.$$

令 $r_1 \rightarrow \infty$, 则由上题的结果可得:

$$\int_{k_r} f(z) dz = \lim_{r_1 \rightarrow +\infty} \int_{k_{r_1}} f(z) dz = 0.$$

即对任何 $r > r_0$, 有:

$$\int_{k_r} f(z) dz = 0.$$

5. 计算积分:

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^4-1}.$$

解法一 (利用上题结果), 显然 $f(z) = \frac{1}{z^4-1}$

在 $|z| > 1$ 内解析, 且在圆 $k_r: |z| = r > 1$ 上有:

$$|f(z)| = \frac{1}{|z^4-1|} \leq \frac{1}{|z^4|-1} = \frac{1}{r^4-1}.$$

$$\therefore 0 \leq M(r) \leq \frac{1}{r^4-1}, \quad 0 \leq \lim_{r \rightarrow +\infty} rM(r) \leq \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{r}{r^4-1} = 0.$$

利用第 4 题的结果, 即得:

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^4-1} = 0.$$

解法二（利用多连通区域的柯西定理和柯西公式），方程 $z^4 - 1 = 0$ 的根为 $z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = -1, z_4 = -i$ 。

如图3.3，取 r 使分别作出的互不相交的小圆 k_n ：

$$|z - z_n| = r$$

$(n = 1, 2, 3, 4)$ ，都包含在 $|z| = 2$ 内。

显然， $f(z) = \frac{1}{z^4 - 1}$ 在由

$|z| = 2$ 和 $k_n (n = 1, 2, 3, 4)$ 为边界的闭区域上解析，故得：

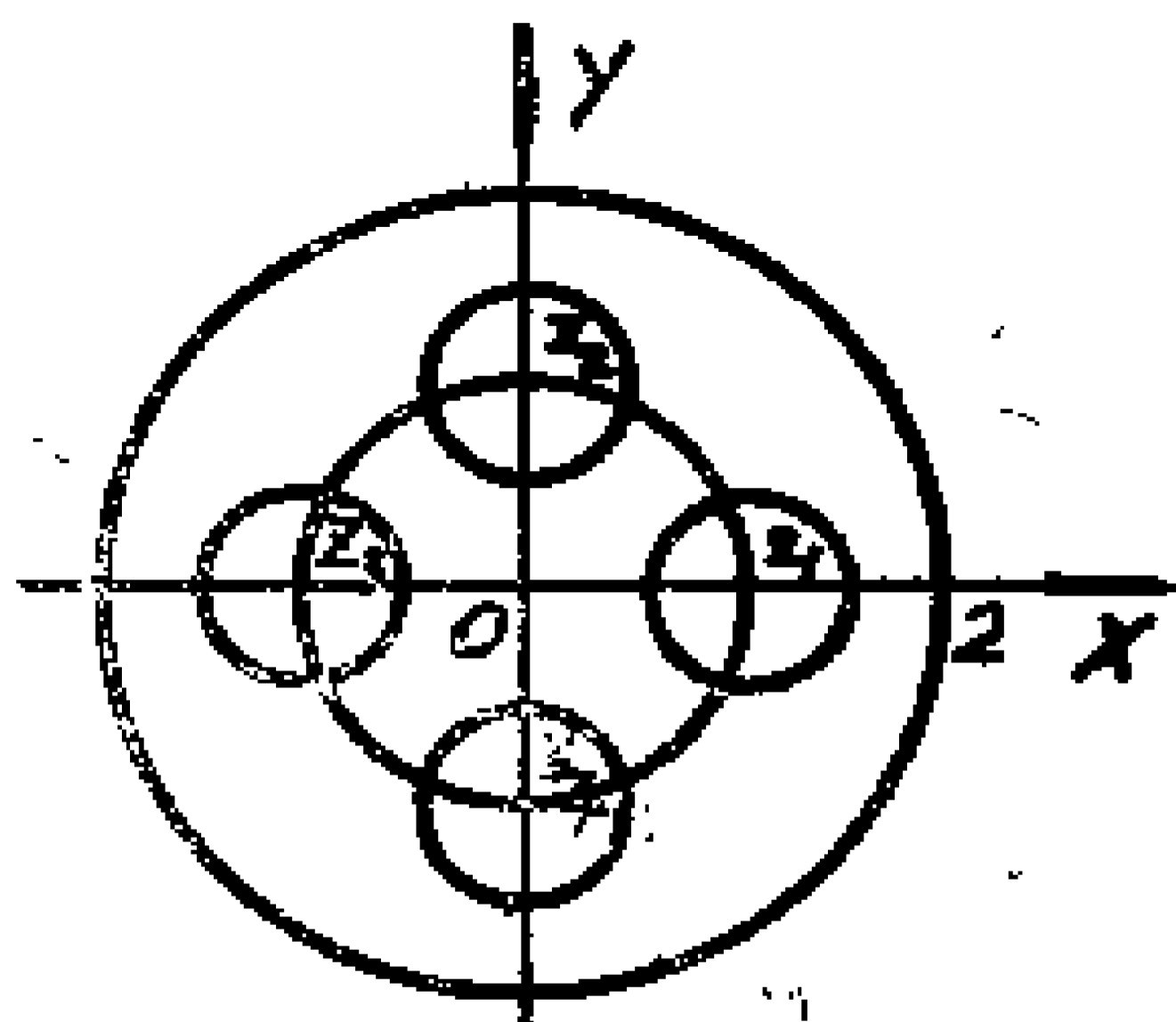


图 3.3

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^4 - 1} = \sum_{n=1}^4 \int_{k_n} \frac{dz}{z^4 - 1} \quad (1)$$

因为 $\frac{1}{(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)}$ 在闭圆盘 $k_1: |z - z_1| \leq r$

上解析，故由柯西公式，得：

$$\begin{aligned} \int_{k_1} \frac{dz}{z^4 - 1} &= \int_{k_1} \frac{1}{\frac{(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)}{z - z_1}} dz \\ &= \frac{2\pi i}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)} \\ &= \frac{2\pi i}{(1 - i)(1 + i)(1 + i)} = \frac{\pi i}{2}. \end{aligned}$$

同样求得：

$$\int_{k_2} \frac{dz}{z^4-1} = -\frac{\pi}{2}, \quad \int_{k_3} \frac{dz}{z^4-1} = -\frac{\pi i}{2}.$$

$$\int_{k_4} \frac{dz}{z^4-1} = \frac{\pi}{2}.$$

代入 (1) 式, 得:

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^4-1} = 0.$$

6. 设 $f(z)$ 及 $g(z)$ 在单连通区域 D 内解析, α 及 β 是 D 内两点, 证明:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)g'(z)dz = f(z)g(z) \Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(z)g(z)dz$$

(分部积分公式), 在这里从 α 到 β 的积分是沿 D 内连接 α 及 β 的一条简单曲线取的.

证: $\because f(z)$ 及 $g(z)$ 在单连通区域 D 内解析,
 $\therefore f(z) \cdot g(z)$ 和 $[f(z) \cdot g(z)]'$ 也都在单连通域 D 内解析, 且有:

$$[f(z) \cdot g(z)]' = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z).$$

根据用原函数求解析函数的积分公式和积分的性质, 得:

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha}^{\beta} f'(z) \cdot g(z)dz + \int_{\alpha}^{\beta} f(z) \cdot g'(z)dz \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} [f(z) \cdot g(z)]' dz = f(z) \cdot g(z) \Big|_{\alpha}^{\beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \int_{\alpha}^{\beta} f(z) \cdot g'(z)dz &= f(z) \cdot g(z) \Big|_{\alpha}^{\beta} - \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f'(z) \cdot g(z)dz. \end{aligned}$$

7. 计算积分

$$(1) I = \int_C \frac{dz}{\sqrt{z}}; \quad (2) I = \int_C \ln z dz.$$

在这里用 C 表示单位圆 (按反时针方向从 1 到 1 取积分), 而被积函数分别取为按下列条件决定的解析分枝:

$$(1) \sqrt{1} = 1 \text{ 及 } \sqrt{1} = -1;$$

$$(2) \ln 1 = 0 \text{ 及 } \ln 1 = 2\pi i.$$

解: (1) 按条件 $\sqrt{1} = 1$ 及所规定的积分路线, 取如下的解析分枝:

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|} e^{i \frac{\arg z}{2}} \text{ 其中 } 0 \leq \arg z < 2\pi.$$

在单位圆上, 令 $z = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

$$\text{于是 } I = \int_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_C \frac{dz}{e^{i \frac{\theta}{2}}} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta}}{e^{i \frac{\theta}{2}}} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} i e^{i \frac{\theta}{2}} d\theta = 2e^{i \frac{\theta}{2}} \Big|_0^{2\pi} = -4.$$

按条件 $\sqrt{1} = -1$ 及所规定的积分路线, 取如下的解析分枝:

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|} e^{i \frac{\arg z + 2\pi}{2}}, \text{ 其中 } 0 \leq \arg z < 2\pi.$$

在单位圆上, 令 $z = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\text{于是 } I = \int_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_C \frac{dz}{e^{i \frac{\theta + 2\pi}{2}}} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta}}{e^{i \frac{\theta + 2\pi}{2}}} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} i e^{i\theta - \frac{2}{2}\pi} d\theta = - \int_0^{2\pi} i e^{i\theta - \frac{\theta}{2}} d\theta = 4.$$

(2) 按条件 $\ln 1 = 0$ 及所规定的积分路线, 取如下的解析分枝:

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z, \text{ 其中 } 0 \leq \arg z < 2\pi.$$

在单位圆上, 令 $z = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

$$\begin{aligned} \text{于是 } I &= \int_C \ln z \, dz = \int_0^{2\pi} (i\theta) i e^{i\theta} d\theta = - \int_0^{2\pi} \theta e^{i\theta} d\theta \\ &= e^{i\theta} (i\theta - 1) \Big|_0^{2\pi} = 2\pi i. \end{aligned}$$

按条件 $\ln 1 = 2\pi i$ 及所规定的积分路线, 取如下的解析分枝:

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z + 2\pi i, \text{ 其中 } 0 \leq \arg z < 2\pi.$$

在单位圆上, 令 $z = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

$$\begin{aligned} \text{于是 } I &= \int_C \ln z \, dz = \int_0^{2\pi} (i\theta + 2\pi i) i e^{i\theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-\theta e^{i\theta} - 2\pi e^{i\theta}) d\theta \\ &= [e^{i\theta} (i\theta - 1) + 2\pi i e^{i\theta}]_0^{2\pi} = 2\pi i. \end{aligned}$$

8. 如果积分路线不经过点 $\pm i$, 那么

$$\int_0^1 \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

证: 设积分路线是依正方向环绕点 i 而不环绕点 $-i$, 绕行一次的简单闭曲线 C_1 , 则:

$$\int_{C_1} \frac{dz}{1+z^2} = \pi.$$

设积分路线是依正方向环绕点 $-i$ 而不环绕 i ，绕行一次的简单闭曲线 C_2 ，则：

$$\int_{C_2} \frac{dz}{1+z^2} = -\pi.$$

设积分路线是依正方向同时环绕点 i 和点 $-i$ 一次的简单闭曲线 C_3 ，则：

$$\int_{C_3} \frac{dz}{1+z^2} = 0.$$

因此，如积分路线环绕点 i 或点 $-i$ 依正方向或负方向绕行 k 次时，积分值应为 $\pm k\pi$ 。而积分路线同时环绕点 i 和点 $-i$ 时，不论绕行多少次，积分值总为零。

设积分路线是连接 0 及 1 但不通过也不环绕 $\pm i$ 简单的曲线 γ ，则：

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{1+z^2} = \int_0^1 \frac{dz}{1+z^2} = \arctan z \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

设积分路线是连接 0 及 1 但不通过 $\pm i$ 的简单曲线 Γ ，则 Γ 可看做是绕行 C_1 这样的曲线 k_1 次，绕行 C_2 这样的曲线 k_2 次，绕行 C_3 这样的曲线 k_3 次，然后再沿 γ 这样的曲线进行的路线，因此：

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{dz}{1+z^2} &= \int_{C_1}^{(k_1 \text{ 次})} \frac{dz}{1+z^2} + \int_{C_2}^{(k_2 \text{ 次})} \frac{dz}{1+z^2} + \\ &\quad + \int_{C_3}^{(k_3 \text{ 次})} \frac{dz}{1+z^2} + \int_{\gamma} \frac{dz}{1+z^2} \\ &= \frac{\pi}{4} + k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

9. 证明：

$$(1) \left| \int_C (x^2 + iy^2) dz \right| \leq 2, \quad C \text{ 为联 } -i \text{ 到 } i \text{ 的线段,}$$

$$(2) \left| \int_C (x^2 + iy^2) dy \right| \leq \pi, \quad C \text{ 为右半单位圆 } |z| = 1,$$

$$\operatorname{Re} z \geq 0,$$

$$(3) \left| \int_C \frac{dz}{z^2} \right| \leq 2, \quad C \text{ 为联 } i \text{ 到 } i+1 \text{ 的线段.}$$

证: (1) 在 C 上, $z = iy$, $-1 \leq y \leq 1$, 即 $|y| \leq 1$,
 $dz = i dy$. 于是有:

$$\begin{aligned} \left| \int_C (x^2 + iy^2) dz \right| &= \left| \int_{-1}^1 iy^2 i dy \right| \leq \int_{-1}^1 |y|^2 dy \\ &\leq \int_{-1}^1 dy = 2. \end{aligned}$$

(2) 在 C 上, 令 $z = e^{i\theta}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, 则

$x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$, $dy = \cos \theta d\theta$. 于是有:

$$\begin{aligned} \left| \int_C (x^2 + iy^2) dy \right| &= \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \theta + i \sin^2 \theta) \cos \theta d\theta \right| \\ &\leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos^2 \theta + i \sin^2 \theta| |\cos \theta| d\theta \\ &\leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta} d\theta \\ &\leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^4 \theta + 2\sin^2 \theta \cos^2 \theta + \sin^4 \theta} d\theta \end{aligned}$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi.$$

(3) 在 C 上, 令 $z = x + i$, $0 \leq x \leq 1$, 则 $dz = dx$, 于是有:

$$\begin{aligned} \left| \int_C \frac{dz}{z^2} \right| &= \left| \int_0^1 \frac{dx}{(x+i)^2} \right| \leq \int_{-1}^1 \frac{dx}{|x+i|^2} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} < 2. \end{aligned}$$

10. 设 $f(z)$ 在原点的邻域内连续。那么

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) d\theta = 2\pi f(0).$$

证: 因 $f(z)$ 在原点的邻域内连续, 故对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使当 $|z| < \delta$ 时, 有:

$$|f(z) - f(0)| < \varepsilon.$$

今取 $r < \delta$, $z = re^{i\theta}$, 则由 $|z| = |re^{i\theta}| = r < \delta$, 可得:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) d\theta - 2\pi f(0) \right| &\leq \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - f(0)| d\theta \\ &< \varepsilon \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\varepsilon. \end{aligned}$$

由于 ε 是任意小的正数, 故有:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) d\theta = 2\pi f(0).$$

11. 计算积分

$$(1) \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz, \quad (2) \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 + 2},$$

$$(3) \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+2}, \quad (4) \int_{|z|=1} \frac{z dz}{(2z+1)(z-2)}$$

解: (1) 由柯西公式, 得:

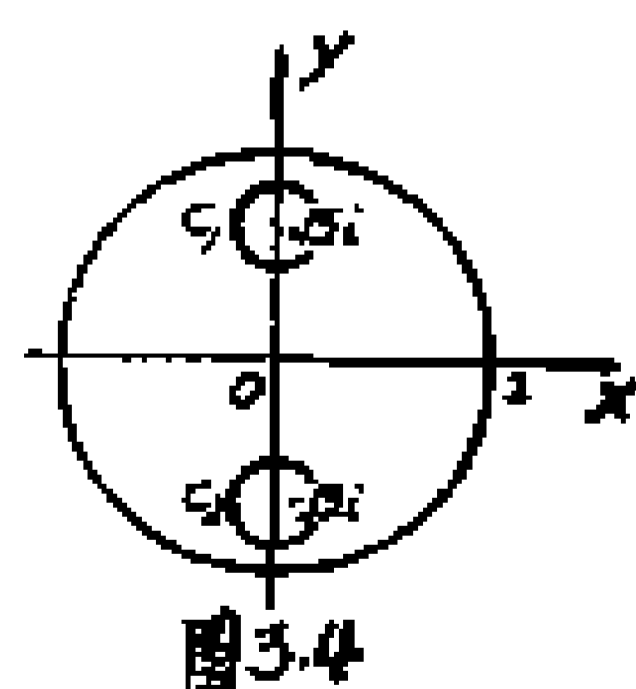
$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz = \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z-0} dz = \left. \frac{2\pi i e^z}{z-0} \right|_{z=0} = 2\pi i.$$

(2) 函数 $\frac{1}{z^2+2}$ 在 $z = \pm\sqrt{2}i$ 处

不解析, 如图 3.4, 在 $|z|=2$ 的
内区域分别以 $\pm\sqrt{2}i$ 为心作两个圆 c_1

c_2 , 那么函数 $\frac{1}{z^2+2}$ 在由 $|z|=2$,

c_1 和 c_2 所围成的闭区域上解析, 根据关于多连通区域的柯西定理, 得:



$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+2} = \int_{c_1} \frac{dz}{z^2+2} + \int_{c_2} \frac{dz}{z^2+2} \quad (*)$$

又由柯西公式, 得:

$$\begin{aligned} \int_{c_1} \frac{dz}{z^2+2} &= \int_{c_1} \frac{1}{\frac{z+\sqrt{2}i}{z-\sqrt{2}i}} dz = \left. \frac{2\pi i}{z+\sqrt{2}i} \right|_{z=\sqrt{2}i} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

$$\text{同理可得: } \int_{c_2} \frac{dz}{z^2+2} = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

故由 (*) 式, 得:

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+2} = 0.$$

(3) 因 $\frac{1}{z^2+2}$ 在 $|z| \leq 1$ 上解析, 故由柯西定理, 得:

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+2} = 0.$$

(4) 由柯西公式, 得:

$$\begin{aligned} \int_{|z|=1} \frac{z dz}{(2z+1)(z-2)} &= \int_{|z|=1} \frac{\frac{z}{2(z-2)}}{z - \left(-\frac{1}{2}\right)} dz \\ &= 2\pi i \cdot \frac{z}{2(z-2)} \Big|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{5}\pi i. \end{aligned}$$

12. 证明:

$$\left(\frac{z^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^n e^{z\zeta}}{n! \zeta^n} \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

在这里 C 是围绕原点的一条简单闭曲线

证: 若令 $f(\zeta) = \frac{z^n}{n!} e^{z\zeta}$, 则 $f(\zeta)$ 在 ζ 平面上解析,

由解析函数的高阶导数公式, 对于 $z=0$, 有:

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{z^n}{n!} e^{z\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}}$$

$$\text{即 } f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{z^n e^{z\zeta}}{n! \zeta^n} \frac{d\zeta}{\zeta} \quad (1)$$

这里 C 是一条绕原点的简单闭曲线.

由设 $f^{(n)}(\zeta) = \frac{z^n}{n!} z^n e^{z\zeta}$, 故又有:

$$f^{(n)}(0) = \frac{(z^n)^2}{n!} \quad (2)$$

从而由 (1) 和 (2), 得:

$$\left(\frac{z^n}{n!}\right)' = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^n e^{\zeta} d\zeta}{n! \zeta^n}.$$

13. 设 $f(z) = \int_{|\zeta|=3} \frac{3\zeta^2 + 7\zeta + 1}{\zeta - z} d\zeta.$

求 $f'(1+i).$

解: 设 $g(z) = 3z^2 + 7z + 1$, 显然它在整个平面上解析, 从而由柯西公式得:

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=3} \frac{3\zeta^2 + 7\zeta + 1}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} f(z).$$

$$\therefore \underline{f(z) = 2\pi i g(z).}$$

$$\underline{f'(z) = 2\pi i g'(z).}$$

(18)

而 $g'(1+i) = 6(1+i) + 7 = \underline{13+6i},$

$$\therefore \underline{f'(1+i) = 2\pi i(13+6i) = 2\pi(-6+13i).}$$

14. 通过计算 $\int_{|z|=1} \left(z + \frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z},$

证明 $\int_0^{2\pi} \cos^n \theta d\theta = \begin{cases} 2\pi \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} & \text{当 } n=2k \text{ 时;} \\ 0 & \text{当 } n=2k+1 \text{ 时.} \end{cases}$

证: 设 $z = e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$), 则:

$$\int_{|z|=1} \left(z + \frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^n i d\theta$$

$$= 2^n i \int_0^{2\pi} \cos^n \theta d\theta \quad (1)$$

又由解析函数的高阶导数公式, 得:

$$\begin{aligned}\int_{|z|=1} \left(z + \frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z} &= \int_{|z|=1} \frac{(z^2 + 1)^n}{z^{n+1}} dz \\ &= \frac{2\pi i}{n!} [(z^2 + 1)^n]^{(n)}_{z=0}\end{aligned}\quad (2)$$

由 (1) 和 (2), 得:

$$\int_0^{2\pi} \cos^n \theta d\theta = \frac{2\pi}{2^n \cdot n!} [(z^2 + 1)^n]^{(n)}_{z=0} \quad (3)$$

记 $f(z) = (1 + z^2)^n$, 需要计算

$$f^{(n)}(0) = [(z^2 + 1)^n]^{(n)}_{z=0}$$

因为

$$\begin{aligned}f(z) &= \begin{cases} z^{2n} + c_1^n z^{2n-2} + \dots + c_n^k z^n + c_{n-1}^{k-1} z^{n-2} + \dots + c_n^n; & \text{当 } n = 2k; \\ z^{2n} + c_1^n z^{2n-2} + \dots + c_{\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} z^{n+1} + c_{\frac{n+1}{2}}^{\frac{n+1}{2}} z^{n-1} + \dots + c_n^n; & \text{当 } n = 2k+1 \end{cases}\end{aligned}$$

(此处 k 为自然数)。它的展式的各项在 $z=0$ 处的 n 阶导数除了:

$$\left(c_n^k z^n\right)_{z=0}^{(n)} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \cdot n!$$

外, 均等于零, 所以有:

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} \frac{2k(2k-1)\cdots(k+1)}{k!} \cdot n!, & n = 2k; \\ 0, & n = 2k+1. \end{cases}$$

把 $f^{(n)}(0)$ 代入 (3), 则当 $n = 2k$ 时, 得:

$$\int_0^{2\pi} \cos^n \theta d\theta = \frac{2\pi}{2^n \cdot n!} \frac{2k(2k-1)\cdots(k+1)}{k!} (n)!.$$

$$= 2\pi \cdot \frac{(2k)!}{2^{n+k}(k!)^2} = 2\pi \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)}$$

而当 $n = 2k + 1$ 时, 得: $\int_0^{2\pi} \cos^n \theta d\theta = 0.$

15. 如果在 $|z| < 1$ 内, $f(z)$ 解析, 并且 $|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}$

证明: $|f^{(n)}(0)| \leq (n+1)! \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e(n+1)!$

$(n = 1, 2, \cdots).$

证: 由于 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 内解析, 取积分路线 C :

$|z| = \frac{n}{n+1}$, 则由解析函数的高阶导数公式, 得:

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$$

从而由条件 $|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}$, 并利用积分基本性质 (5),

得:

$$|f^{(n)}(0)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \right|$$

$$\leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{1}{1 - \frac{n}{n+1}} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \cdot 2\pi \cdot \frac{n}{n+1}$$

$$= (n+1)! \frac{(n+1)^n}{n^n} = (n+1)! \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$< e(n+1)!$$

$(n = 1, 2, \cdots).$

16. 证明：设 $\varphi(\xi)$ 在一条简单曲线 C 上连续，这里 C 不一定是闭的，那么在不含 C 上的点的任何区域 D 内，函数

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

解析，并且有任意阶导数：

$$\Phi^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi \quad (n = 1, 2, \dots).$$

确定 $\Phi(z)$ 的积分称为柯西型积分，在这里即使 C 是闭的，沿 C 的积分也不一定是按反时针方向取的。

证：用数学归纳法，证明

$$(1) \text{ 当 } n = 1 \text{ 时， } \Phi'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi.$$

设 z 是 D 内任意取定的一点， $z+h$ 表示 D 内另一点，依定义，就是要证明：

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(z+h) - \Phi(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi.$$

取差的绝对值：

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Phi(z+h) - \Phi(z)}{h} - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\xi) d\xi}{(\xi - z - h)(\xi - z)} - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{h\varphi(\xi) d\xi}{(\xi - z - h)(\xi - z)^2} \right| \quad (1) \end{aligned}$$

$\because \varphi(\xi)$ 在 C 上连续， $\therefore |\varphi(\xi)| < M$ ，用 $2d (d > 0)$ 表示曲线 C 到点 z 的距离（就是 C 上所有的点与点 z 的距离的最小值），于是对于 C 上的任意一点 ξ ，只要取 $\xi + h$ ，使 $|h| < d$

就有 $|\xi - z| > d$, $|\xi - z - h| > d$, 于是有:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{h\varphi(\xi)d\xi}{(\xi - z - h)(\xi - z)^2} \right| \leq \frac{|h|}{2d} \frac{Ml}{d^2} \quad (2)$$

其中 l 为曲线 C 的长度.

从而(2)式的右边随 $h \rightarrow 0$ 而趋于零, 于是(1)式右边的积分也随 h 一起趋于零. 故当 $n = 1$ 时, 结论成立. 从而 $\Phi(z)$ 在 D 内解析.

(2) 假设 $n = k$ 时, 有:

$$\Phi^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi.$$

证明 $n = K + 1$ 时, 有:

$$\Phi^{(k+1)}(z) = \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^{k+2}} d\xi.$$

也就是要证明:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi^{(k)}(z+h) - \Phi^{(k)}(z)}{h} = \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^{k+2}} d\xi$$

$$\because \Phi^{(k)}(z+h) - \Phi^{(k)}(z)$$

$$= \frac{k!}{2\pi i} \int_C \varphi(\xi) \left[\frac{1}{(\xi - z - h)^{k+1}} - \frac{1}{(\xi - z)^{k+1}} \right] d\xi$$

$$= \frac{k!}{2\pi i} \int_C \varphi(\xi) h \cdot \frac{1}{(\xi - z - h)^{k+1} (\xi - z)^{k+1}} \cdot$$

$$\cdot [(\xi - z)^k + (\xi - z)^{k-1}(\xi - z - h) +$$

$$+ \cdots + (\xi - z - h)^k] d\xi$$

$$\therefore \left| \frac{\Phi^{(k)}(z+h) - \Phi^{(k)}(z)}{h} - \frac{(K+1)!}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\xi)d\xi}{(\xi - z)^{k+2}} \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_C \varphi(\xi) \left[\frac{1}{(\xi-z)^{k+1}(\xi-z-h)^{k+1}} \cdot [(\xi-z)^k + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (\xi-z)^{k-1}(\xi-z-h) + \cdots + (\xi-z-h)^k] - \frac{k+1}{(\xi-z)^{k+2}} \right] d\xi \right| \\
&= \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_C \varphi(\xi) \frac{1}{(\xi-z)^{k+2}(\xi-z-h)^{k+1}} \cdot \right. \\
&\quad \cdot [(\xi-z)^{k+1} + (\xi-z)^k(\xi-z-h) + \cdots + \\
&\quad \left. + (\xi-z)(\xi-z-h)^k - (k+1)(\xi-z-h)^{k+1}] d\xi \right| \quad (3)
\end{aligned}$$

估计 (3) 式右端中被积函数的值。首先, 和 $n=1$ 时一样, 有 $|\varphi(\xi)| < M$, $|\xi-z| > d$, $|\xi-z-h| > d$ 。其次, 以原点为心作一个包含积分路线 C 及点 z 、 $z+h$ 的圆盘 $|z| \leq R$, 则有 $|\xi-z| \leq 2R$, $|\xi-z-h| \leq 2R$ 。

再把分子中的 $-(k+1) \cdot (\xi-z-h)^{k+1}$ 拆成 $k+1$ 个 $-(\xi-z-h)^{k+1}$ 配到前面的 $k+1$ 项上去, 从而估计分子的值:

$$\begin{aligned}
&|[(\xi-z)^{k+1} - (\xi-z-h)^{k+1}] + [(\xi-z)^k(\xi-z-h) - \\
&\quad - (\xi-z-h)^{k+1}] + \cdots + [(\xi-z)(\xi-z-h)^k - \\
&\quad - (\xi-z-h)^{k+1}]| \\
&= |h| |[(\xi-z)^k + (\xi-z)^{k-1}(\xi-z-h) + \cdots + \\
&\quad + (\xi-z-h)^k] + (\xi-z-h)[(\xi-z)^{k-1} + (\xi-z)^{k-2} \cdot \\
&\quad \cdot (\xi-z-h) + \cdots + (\xi-z-h)^{k-1}] + \cdots + (\xi-z-h)^k| \\
&\leq |h| [(k+1) + k + \cdots + 1] (2R)^k = |h| \frac{(k+1)(k+2)}{2} (2R)^k
\end{aligned}$$

因此, (3) 式右端中被积函数的绝对值不超过

$$M \cdot |h| \cdot \frac{(k+1)(k+2)(2R)^k}{2d^{2k+3}}.$$

从而 (3) 式右端不超过

$$\frac{k!}{2\pi} \cdot M \cdot |h| \cdot \frac{(k+1)(k+2)(2R)^k}{2 \cdot d^{2k+2}} \text{ 显然, 它}$$

随 $h \rightarrow 0$ 而趋于零。从而得:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi^{(k)}(z+h) - \Phi^{(k)}(z)}{h} \\ = \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\xi)}{(\xi-z)^{k+2}} d\xi. \text{ 这就是所要证明的.} \end{aligned}$$

因此, 有:

$$\Phi^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}} d\xi \quad (n=1, 2, \dots).$$

17. 如果 $f(z)$ 在 $|z-z_0| > r_0$ 内解析, 并且 $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = A$, 那么对任何正数 $r > r_0$,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{k_r} f(z) dz = A,$$

在这里 k_r 是圆 $|z-z_0| = r$, 积分是按反时针方向取的. $\int \frac{f(z)}{z-z_0} dz$

证: 利用 $\int_{k_r} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$, 得:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{k_r} f(z) dz - A &= \frac{1}{2\pi i} \int_{k_r} \left[f(z) - \frac{A}{z-z_0} \right] dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{k_r} \left[\frac{zf(z) - A - z_0 f(z)}{z-z_0} \right] dz \end{aligned}$$

由 $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = A$ 得 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$, 从而得:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} [zf(z) - A - z_0 f(z)] = 0.$$

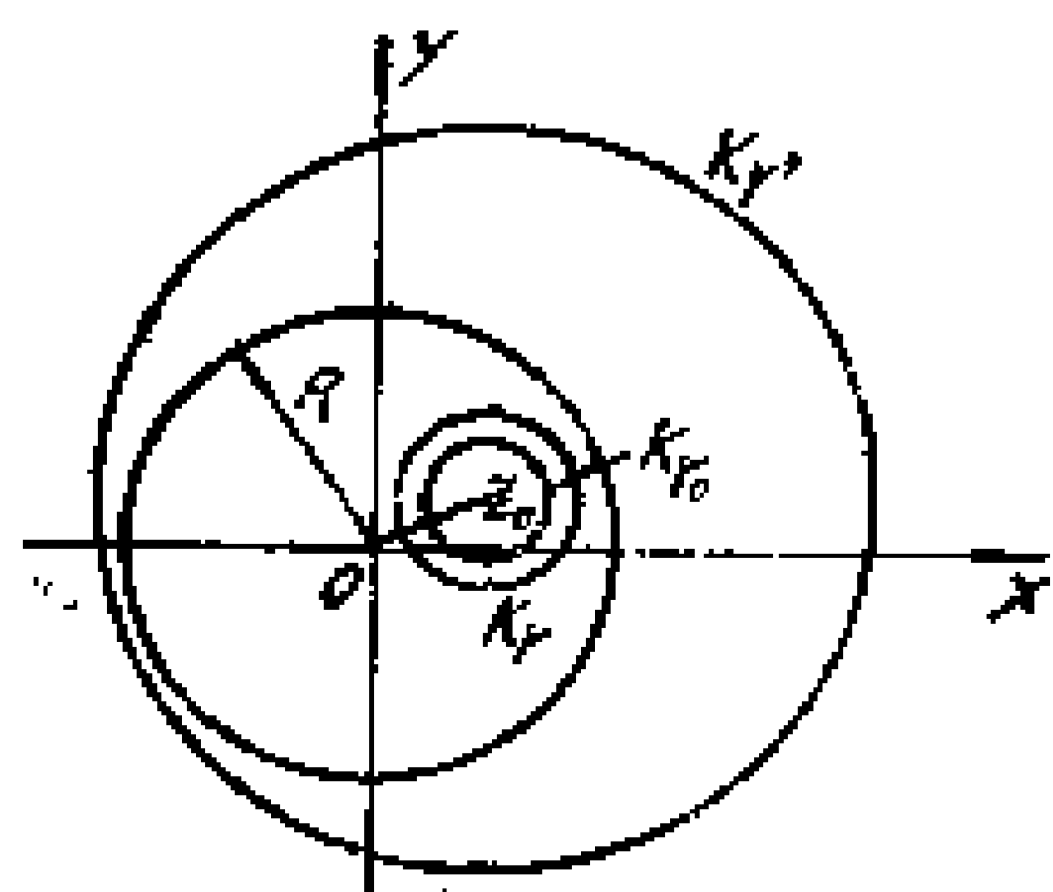


图 3.5

因此, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $R > r_0 + |z_0|$, 使当 $|z| > R$ 时, 有:

$$|zf(z) - A - z_0 f(z)| < \varepsilon.$$

于是, 当 $r' > |z_0| + R$ 即当 $r' > r_0 + 2|z_0|$ 时, 有:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{K_{r'}} f(z) dz - A \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{K_{r'}} \left[\frac{zf(z) - A - z_0 f(z)}{z - z_0} \right] dz \right| \\ &< \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{r'} \cdot 2\pi r' = \varepsilon \end{aligned}$$

故 $\lim_{r' \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{K_{r'}} f(z) dz = A.$

任意取定 r 使 $r > r_0$, 则按多连通区域的柯西定理, 有:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{K_{r'}} \check{f}(z) dz = \int_{K_r} f(z) dz.$$

令 $r' \rightarrow +\infty$, 两边取极限, 得:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{K_r} f(z) dz = \lim_{r' \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{K_{r'}} \check{f}(z) dz = A.$$

18. 如果函数 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 的外区域 D 内及 C 上每一点解析, 且

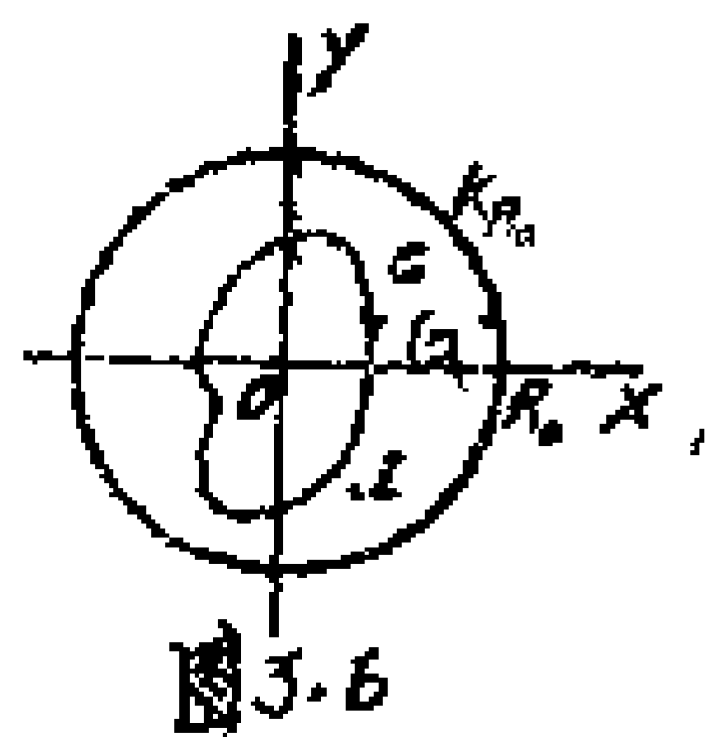
$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = a, \text{ 那么}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \begin{cases} -f(z) + a & (\text{当 } z \in D \text{ 时}), \\ a & (\text{当 } z \in C \text{ 的内区域时}) \end{cases}$$

这里沿 C 的积分是按反时针方向取的。

证：对于任意取定的 $z \in D$ ，取充分大的正数 R_0 ，作圆周 K_{R_0} ：

$|z| = R_0$ ，包含曲线 C 及点 z ，如图3.6，则依假设条件知 $f(z)$ 在 C 与 K_{R_0} 所围的多连通区域 G 内及其边界上解析，根据柯西公式，得：



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{K_{R_0}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

其中 C^- 与 C 反向。

$$\therefore \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = -f(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{K_{R_0}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (1)$$

设 $F(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi - z}$ ，则 $F(\xi)$ 在 $|\xi| \geq R_0$ 上解析，

$$\text{又} \because \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = a, \therefore \lim_{\xi \rightarrow \infty} \xi F(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{f(\xi)}{1 - \frac{z}{\xi}} = a$$

故根据第17题证得的结果，对任何 $R \geq R_0$ ，有：

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{K_R} F(\xi) d\xi = a, \text{ 其中 } K_R: |\xi| = R$$

再由柯西定理有

$$\int_{K_{R_0}} F(\xi) d\xi = \int_{K_R} F(\xi) d\xi. \text{ 因此，由 (1)}$$

$$\text{式得：} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = -f(z) + a.$$

又若 $z \in C$ 的内区域，则 $\frac{f(\xi)}{\xi - z}$ 在 G 上解析，从而根据多连

通区域的柯西定理，有：

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_{R_0}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = a \quad (2)$$

由（1）和（2）即得求证的结果。

第四章 级 数

1. 设已给复数序列 $\{z_n\}$, 如果 $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \xi$, 其中 ξ 是一有限复数, 那么 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}{n} = \xi$.

证法一: 任给 $\varepsilon > 0$. 因 $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \xi$, 故存在正整数 $N_1 = N_1(\varepsilon)$, 使当 $n \geq N_1$ 时, 有 $|z_n - \xi| < \frac{\varepsilon}{2}$, 从而

$$\begin{aligned} & \left| \frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}{n} - \xi \right| = \\ &= \left| \frac{(z_1 - \xi) + \cdots + (z_{N_1} - \xi)}{n} + \frac{(z_{N_1+1} - \xi) + \cdots + (z_n - \xi)}{n} \right| \\ &\leq \frac{|z_1 - \xi| + \cdots + |z_{N_1} - \xi|}{n} + \frac{|z_{N_1+1} - \xi| + \cdots + |z_n - \xi|}{n} \\ &\leq \frac{|z_1 - \xi| + \cdots + |z_{N_1} - \xi|}{n} + \frac{n - N_1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \frac{|z_1 - \xi| + \cdots + |z_{N_1} - \xi|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}, \text{ 对上述的 } \varepsilon > 0, \text{ 总可找到} \\ &N \geq N_1, \text{ 使当 } n \geq N \text{ 时, } \frac{|z_1 - \xi| + \cdots + |z_{N_1} - \xi|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}, \\ &\text{由此可知, 当 } n \geq N \text{ 时, 就有} \end{aligned}$$

$$\left| \frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_{N_1} + z_{N_1+1} + \cdots + z_n}{n} - \xi \right| < \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}{n} = \zeta.$$

证法二：设 $z_n = x_n + iy_n$ ($n = 1, 2, \cdots$)， $\zeta = x + iy$ ，

$\because \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \zeta$ ， $\therefore \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ ， $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y$ ，于是有（参

见吉林大学编《数学分析》中册 p. 16）：

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = x,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} = y.$$

$$\begin{aligned} \text{从而 } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}{n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) + \cdots + (x_n + iy_n)}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} + i \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} \\ &= x + iy = \zeta. \end{aligned}$$

2. 证明任何有界的复数序列一定有一个收敛的子序列。

证：设 $z_n = x_n + iy_n$ ， $|z_n| \leq M$ ($n = 1, 2, \cdots$)

因 $|x_n|$ 及 $|y_n| \leq |z_n| \leq M$ ，故 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都有界。根据关于实数列的致密性定理，可知 $\{x_n\}$ 有收敛于某一常数 a 的子序列 $\{x_{n_k}\}$ ，相应地，在 $z_{n_k} = x_{n_k} + iy_{n_k}$ ($k = 1, 2, \cdots$) 中 $\{y_{n_k}\}$ 仍有界，因而 $\{y_{n_k}\}$ 也有一收敛于某一常数 b 的子序列 $\{y_{n_{k_1}}\}$ ，又在 $z_{n_{k_1}} = x_{n_{k_1}} + iy_{n_{k_1}}$ ($j = 1, 2, \cdots$) 中，

$\{x_{n_{k_j}}\}$ 仍收敛于 a ，因此所设序列有一收敛于 $a+ib$ 的子序列 $\{z_{n_{k_j}}\}$ 。

3. 如果复数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} z'_n$ (1) 及 $\sum_{n=1}^{+\infty} z''_n$ (2) 绝对收敛，并且它的和分别是 σ' 及 σ'' ，那么级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (z'_1 z''_n + z'_2 z''_{n-1} + \cdots + z'_n z''_1) \quad (3)$$

也绝对收敛，并且它的和是 $\sigma' \cdot \sigma''$ 。

证：作级数 (1) 和 (2) 的所有各项中各取一项的乘积，如：

$$z'_1 z''_1, z'_1 z''_2, z'_2 z''_1, z'_1 z''_3, z'_2 z''_2, \cdots,$$

$$z'_n z''_s, \cdots, \text{ 设按某种次序排列 } z'_k z''_s (k, s = 1, 2, \cdots) \text{ 所成}$$

的一个数列为： $w_1, w_2, \cdots, w_n, \cdots$ ，其中 $w_k = z'_{n_k} \cdot z''_{m_k}$ 。

考虑级数 $|w_1| + |w_2| + \cdots + |w_n| + \cdots$ ，

$$\text{设 } s_n^* \text{ 为它的部分和： } S_n^* = \sum_{k=1}^n |w_k| = \sum_{k=1}^n |z'_{n_k} z''_{m_k}|$$

记 $\nu = \max(n_1, m_1, n_2, m_2, \cdots, n_n, m_n)$ 。

$$\sigma_{\nu}^* = |z'_1| + |z'_2| + \cdots + |z'_{\nu}|,$$

$$\sigma_{\nu}^{**} = |z''_1| + |z''_2| + \cdots + |z''_{\nu}|.$$

因 $\sum_{n=1}^{+\infty} z'_n$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty} z''_n$ 绝对收敛，所以 σ_{ν}^* 和 σ_{ν}^{**} 均为有界，

而

$$\begin{aligned} s_n^* &= |z'_{n_1} z''_{m_1}| + |z'_{n_2} z''_{m_2}| + \cdots + |z'_{n_n} z''_{m_n}| \\ &\leq (|z'_1| + |z'_2| + \cdots + |z'_n|) \cdot \\ &\quad \cdot (|z''_1| + |z''_2| + \cdots + |z''_n|) = \sigma_n' \sigma_n'', \end{aligned}$$

由此可知 s_n^* 也为有界, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 也绝对收敛,

从而由 $z'_k z''_s$ ($k, s = 1, 2, \dots$), 按照任何方式排列所构成的级数当然也包括级数(3)都绝对收敛, 并且都收敛于同一和数。

为了要证明级数(3)的和为 $\sigma' \sigma''$, 考虑由正方形法排列所构成的级数, 并加括号如下:

$$\begin{aligned} & z'_1 z''_1 + (z'_1 z''_2 + z'_2 z''_2 + z'_2 z''_1) + \\ & + (z'_1 z''_3 + z'_2 z''_3 + z'_3 z''_3 + z'_3 z''_2 + z'_3 z''_1) + \cdots, \quad (4) \end{aligned}$$

若记级数(1)与(2)的部分和为 σ'_n 和 σ''_n , 级数(4)

的部分和为 A_n , 则有 $A_n = \sigma'_n \sigma''_n$, 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sigma'_n \sigma''_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma'_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma''_n = \sigma' \sigma''.$$

由以上讨论可知级数(3)的和是 $\sigma' \cdot \sigma''$.

4. 试证明:

1°. 设复平面点集 E 表示区域、闭区域或简单曲线.

设 $f_n(z)$ 在集 E 上连续 ($n = 1, 2, \dots$), 并且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$

在 E 上一致收敛于 $f(z)$ ，那末 $f(z)$ 在 E 上连续。

2°. 设 $f_n(z)$ 在简单曲线 C 上连续 ($n=1, 2, \dots$)，并且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 C 上一致收敛于 $f(z)$ ，那末

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_C f_n(z) dz = \int_C f(z) dz.$$

证：1° 任意取定 $z_0 \in E$ ，记 $S_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z)$ 。由于

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上一致收敛于 $f(z)$ ，故对于任给 $\varepsilon > 0$ ，可以

找到一个与 z 无关的正整数 $N = N(\varepsilon)$ ，当 $n \geq N(\varepsilon)$ ， $z \in E$ 时，有 $|f(z) - S_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$ ，对于这个确定的 N ，

$S_N(z) = \sum_{k=1}^N f_k(z)$ 是有限多个在点 z_0 处连续函数之和，

因而它在 z_0 处也连续，所以对上述 $\varepsilon > 0$ ，必有 $\delta > 0$ ，使当 $|z - z_0| < \delta$ 时，不等式 $|S_N(z) - S_N(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ (2) 恒成立。

由 (1) 和 (2) 可知，当 $|z - z_0| < \delta$ 时，

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &\leq |f(z) - S_N(z)| + |S_N(z) - S_N(z_0)| + \\ &\quad + |S_N(z_0) - f(z_0)| > \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

所以 $f(z)$ 在 z_0 连续，由于 z_0 是 E 上任意一点，所以 $f(z)$ 在 E 上连续。

2°. 记 $S_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z)$, 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 C 上一致

收敛于 $f(z)$, 所以任给 $\varepsilon > 0$, 必有 $N = N(\varepsilon)$, 使当 $n \geq N$, $z \in C$ 时, $|f(z) - S_n(z)| < \varepsilon$, 从而

$$\begin{aligned} \left| \int_C f(z) dz - \int_C S_n(z) dz \right| &= \\ &= \left| \int_C [f(z) - S_n(z)] dz \right| \leq \varepsilon \cdot L, \end{aligned}$$

其中 L 为曲线 C 的长度. 于是有.

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C S_n(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_C \left(\sum_{k=1}^n f_k(z) \right) dz \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^n \int_C f_k(z) dz \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \int_C f_k(z) dz. \end{aligned}$$

5. 试求下列幂级数的收敛半径:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} z^n$, 其中 $|q| < 1$.

解: $\because \lim_{n \rightarrow \infty} |q|^{n^2} = 0, \therefore R = +\infty$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$.

解: 级数的系数 $a_k = \begin{cases} 1, & \text{当 } k = n! \\ 0, & \text{当 } k \neq n! \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots)$

$\therefore \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1; \therefore R = 1.$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} n^p z^n$, 其中 p 是一正整数,

$$\text{解: } \because l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^p)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^{\frac{1}{n}})^p = 1$$

$$\therefore R = 1.$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} [3 + (-1)^n]^n z^n;$$

$$\text{解: } \because l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{[3 + (-1)^n]^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} [3 + (-1)^n] = 4$$

$$\therefore R = \frac{1}{4}.$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n;$$

$$\text{解: } \because l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{e}.$$

$$\therefore R = e.$$

$$(6) 1 + \frac{ab}{c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)} z^2 + \dots + \\ + \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)b(b+1)\dots(b+n-1)}{n!c(c+1)\dots(c+n-1)} z^n + \dots$$

其中 a, b, c 是复数, 但 c 不是零或负整数。

$$\text{解: } \because l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a+n)(b+n)}{(n+1)(c+n)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{a}{n})(1 + \frac{b}{n})}{(1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{c}{n})} = 1, \therefore R = 1.$$

6. 设在 $|z| < R$ 内解析的函数 $f(z)$ 有泰勒展式:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

试证: (1) 令 $M(r) = \max |f(re^{i\theta})|$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$), 我们有:

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n} \quad (\text{柯西不等式}),$$

在这里 $n = 0, 1, 2, \dots, 0 < r < R$.

(2) 由 (1) 证明刘维尔定理。

(3) 当 $0 \leq r < R$ 时,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

$$\text{证: (1) } \because a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

其中 $C: |z| = r < R$, 在 C 上, $|f(re^{i\theta})| \leq M(r)$, 于是有,

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi \right| \leq \frac{M(r)}{2\pi r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{M(r)}{r^n}.$$

(2) 证法一 (利用 (1) 中柯西不等式).

设 $f(z)$ 在 z 平面上解析, 则泰勒展式

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

对于 z 平面上每一点 z 都成立, 又因为 $f(z)$ 有界, 所以存在常数 $M > 0$, 使 $|f(z)| \leq M$, 于是由 (1) 中的柯西不等式, 得 $|a_n| \leq \frac{M}{R^n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$

因为 R 可以任意大, 故当 $n \geq 1$ 时, 令 $R \rightarrow +\infty$, 对上式两边取极限, 即有 $|a_n| \leq 0$, 所以 $a_n = 0$, 从而 $f(z) = a_0$, 即 $f(z)$ 为常数。

证法二：在 z 平面任取 z_1, z_2 ，作以原点为心以大于 $|z_1|$ 与 $|z_2|$ 的 R 为半径的圆 C ，则由柯西公式可得：

$$\begin{aligned} |f(z_1) - f(z_2)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_1} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_2} dz \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z_1 - z_2}{(z - z_1)(z - z_2)} f(z) dz \right| \leq \\ &\leq \frac{|z_1 - z_2| MR}{(R - |z_1|)(R - |z_2|)} \end{aligned}$$

右方随 $R \rightarrow \infty$ 而趋于零，故 $f(z_1) = f(z_2)$ ，由 z_1, z_2 的任意性，可知 $f(z)$ 为常数。

(3) 在圆盘 $|z| < R$ 内作圆 $C: z = re^{i\theta}$ ，其中 $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 < r < R$ ，于是

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{i n \theta} \quad (1)$$

$$\overline{f(z)} = \sum_{m=0}^{\infty} \overline{a_m} \overline{z^m} = \sum_{m=0}^{\infty} \overline{a_m} r^m e^{-i m \theta} \quad (2)$$

$$|f(z)|^2 = f(z) \overline{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{i n \theta} \sum_{m=0}^{\infty} \overline{a_m} r^m e^{-i m \theta}.$$

因为 (1) (2) 两式右端的级数都绝对一致收敛，故可按任意规则相乘，乘积级数在 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 上一致收敛，故可在此区间上逐项积分。注意到对应于 $m \neq n$ 的各项积分都等于零，故有

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{a_n} r^{2n} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

7. 证明：如果 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $|z| \leq r$ 上绝对一致收敛， $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ 在 $|z| < \rho$ 内收敛，其中 $0 < r$ 及 $\rho < +\infty$ ，那么在 $|z| < \rho r$ 内，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r} f(\xi) g\left(\frac{z}{\xi}\right) \frac{d\xi}{\xi}.$$

证：由条件可知， $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n$ 在 $|\xi| = r$ 上绝对一致收敛，

又当 $|z| < \rho r$ 时，在 $|\xi| = r$ 上， $\left|\frac{z}{\xi}\right| < \rho$ 。

故对于满足上条件的确定的 z ， $g\left(\frac{z}{\xi}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left(\frac{z}{\xi}\right)^k$

在 $|\xi| = r$ 上绝对一致收敛，故以上两级数的乘积在 $|\xi| = r$ 上可逐项积分，又注意到 $n \neq k$ 时，对应的各项积分都等于零，则有：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r} f(\xi) g\left(\frac{z}{\xi}\right) \frac{d\xi}{\xi} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left(\frac{z}{\xi}\right)^k \frac{d\xi}{\xi} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_n \xi^n b_k \frac{z^k}{\xi^{k+1}} \frac{d\xi}{\xi} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_n b_k z^k \int_{|\xi|=r} \xi^{n-k-1} d\xi$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n.$$

即在 $|z| < \rho r$ 内, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r} f(\xi) g\left(\frac{z}{\xi}\right) d\xi.$$

8. 设 z 是任一复数, 证明 $|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z|e^{|z|}$.

$$\text{证: } |e^z - 1| = \left| z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \right|$$

$$\leq |z| + \frac{|z|^2}{2!} + \frac{|z|^3}{3!} + \dots$$

$$= \left(1 + |z| + \frac{|z|^2}{2!} + \frac{|z|^3}{3!} + \dots \right) - 1$$

$$= e^{|z|} - 1 \quad (1)$$

$$e^{|z|} - 1 = |z| + \frac{|z|^2}{2!} + \frac{|z|^3}{3!} + \dots$$

$$= |z| \left(1 + \frac{|z|}{2!} + \frac{|z|^2}{3!} + \dots \right)$$

$$\leq |z| \left(1 + |z| + \frac{|z|^2}{2!} + \frac{|z|^3}{3!} + \dots \right)$$

$$= |z|e^{|z|} \quad (2)$$

由 (1) 和 (2) 即得: $|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z|e^{|z|}$.

9. 求下列解析函数或多值函数的解析分枝在 $z=0$ 的泰勒展式:

$$(1) \sin^2 z; \quad (2) e^z \cos z; \quad (3) \frac{1}{2} \left(L_n \frac{1}{1-z} \right)^2;$$

$$(4) (2-z)^4; \quad (5) \operatorname{tg} z \text{ (计算到 } z^5 \text{ 的系数)}.$$

$$\text{解: } (1) \sin^2 z = \frac{1 - \cos 2z}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} z^{2n}}{(2n)!}, \quad (|z| < \infty).$$

$$\begin{aligned} (2) e^z \cos z &= \frac{1}{2} [e^{(1+i)z} - e^{(1-i)z}] \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{(1+i)z}{1!} + \frac{(1+i)^2 z^2}{2!} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1+i)^n z^n}{n!} + \dots \right] + \frac{1}{2} \left[1 + \frac{(1-i)z}{1!} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1-i)^2 z^2}{2!} + \dots + \frac{(1-i)^n z^n}{n!} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [(1+i)^n + (1-i)^n] z^n \end{aligned}$$

$$(|z| < \infty).$$

(3) 多值函数 $L_n \frac{1}{1-z}$ 在 $z=0$ 的邻域内可分出单值解析分枝, 取当 $z=0$ 时它的值为 0 的那个分枝, 并且记作 $l_n \frac{1}{1-z}$, 则

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(l_n \frac{1}{1-z} \right)^2 &= \frac{1}{2} [l_n(1-z)]^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^n}{n} + \dots \right) \cdot \left(z + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^2}{n} + \dots)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} \right] z^n$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k} \right) \right] z^n$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \right) z^n. \quad (|z| < 1)$$

$$(4) \quad (2-z)^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{3}{4}} \left(1 - \frac{z}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$$

$$= 2^{\frac{3}{4}} \left[1 + \frac{3}{4} \left(-\frac{z}{2}\right) + \frac{3}{4} \left(\frac{3}{4} - 1\right) \frac{1}{2!} \left(-\frac{z}{2}\right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{3}{4} \left(\frac{3}{4} - 1\right) \frac{\left(\frac{3}{4} - 2\right)}{3!} \left(-\frac{z}{2}\right)^3 + \dots + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{4} \left(\frac{3}{4} - 1\right) \frac{\left(\frac{3}{4} - 2\right) \left(\frac{3}{4} - 3\right) \dots \left[\frac{3}{4} - (n-1)\right]}{n!} \left(-\frac{z}{2}\right)^n + \dots \right]$$

$$= 2^{\frac{3}{4}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \frac{3}{4} \left(\frac{3}{4} - 1\right) \left(\frac{3}{4} - 2\right) \dots \left(\frac{3}{4} - n + 1\right)}{2^n \cdot n!} z^n \right],$$

$$(|z| < 2)$$

(5) 解法一:

$$(\operatorname{tg} z)_{z=0} = 0,$$

$$a_0 = 0,$$

$$(\operatorname{tg} z)'_{z=0} = 1,$$

$$a_1 = 1;$$

$$(\operatorname{tg} z)_{z=0}'' = 0, \quad a_2 = 0;$$

$$(\operatorname{tg} z)_{z=0}''' = 2, \quad a_3 = \frac{1}{3};$$

$$(\operatorname{tg} z)_{z=0}^{(4)} = 0, \quad a_4 = 0;$$

$$(\operatorname{tg} z)_{z=0}^{(5)} = 16, \quad a_5 = \frac{2}{15};$$

$$\therefore \operatorname{tg} z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \dots \quad \left(|z| < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{解法二: } \operatorname{tg} z &= \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots}{1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots} \\ &= z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \dots \end{aligned}$$

10. 设 $f(z)$ 是一整函数, 并且假定存在着一个正整数 n , 以及两个正数 R 及 M , 使得当 $|z| \geq R$ 时, $|f(z)| \leq M|z|^n$. 证明 $f(z)$ 是一个至多 n 次的多项式或一常数.

证: $\because f(z)$ 是整函数,

$$\therefore f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_k z^k + \dots, \quad (|z| < +\infty).$$

由假定, 存在正整数 n 和两个正数 R 及 M , 使当 $|z| \geq R$ 时, $|f(z)| \leq M|z|^n$.

任取 $R_1 \geq R$, 作圆 $C_{R_1}: |z| = R_1$, 于是:

$$|a_k| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R_1}} \frac{f(\xi)}{\xi^{k+1}} d\xi \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M \cdot R_1^n}{R_1^{k+1}} \cdot 2\pi R_1$$

$$= MR_1^{n-k}.$$

当 $k > n$ 时, 令 $R_1 \rightarrow +\infty$, 有 $\lim_{R_1 \rightarrow \infty} MR_1^{n-k} = 0$.

从而 $a_k = 0$, ($k = n+1, n+2, \dots$). 因此

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n.$$

其中 n 是一正整数, 这就表明, $f(z)$ 是一个至多 n 次的多项式或一常数.

11. 求下列解析函数或多值函数的解析分枝在指定区域内的罗朗展式:

$$(1) \quad \frac{e^z}{z(z^2+1)} \quad \text{在 } 0 < |z| < 1 \text{ 内;}$$

$$(2) \quad \frac{1}{(z^6-1)(z-3)} \quad \text{在 } 1 < |z| < 3 \text{ 内;}$$

$$(3) \quad \sin \frac{z}{z-1} \quad \text{在 } 0 < |z-1| < 1 \text{ 内;}$$

$$(4) \quad e^{\frac{z}{z+2}} \quad \text{在 } 2 < |z| < +\infty \text{ 内;}$$

$$(5) \quad \frac{1}{z^a(1+z)} \quad \text{在 } 0 < |z+1| < 1 \text{ 内, 其中 } 0 < a < 1;$$

$$(6) \quad \frac{\operatorname{Ln} z}{z^2-1} \quad \text{在 } 0 < |z-1| < 1 \text{ 及 } 0 < |z+1| < 1 \text{ 内.}$$

解: (1) 在 $0 < |z| < 1$ 内,

$$\begin{aligned} \frac{e^z}{z(z^2+1)} &= \frac{1}{z} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \right) \\ &= \frac{1}{z} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \left[\frac{1+(-1)^n}{2} \right] z^n \right\} \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n (-1)^{\frac{k}{2}} \left[1 + \frac{(-1)^k}{2} \right] \frac{1}{(n-k)!} \right\} z^{n-1}$$

$$(2) \text{ 在 } 1 < |z| < 3 \text{ 内, } \frac{1}{(z^5 - 1)(z - 3)}$$

$$= \frac{-1}{3z^5} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{z^5}\right)\left(1 - \frac{z}{3}\right)}$$

$$= \frac{-1}{3z^5} \left(1 + \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^{10}} + \cdots + \frac{1}{z^{5n}} + \cdots\right) \cdot$$

$$\cdot \left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2} + \cdots + \frac{z^n}{3^n} + \cdots\right)$$

$$= \frac{-1}{3z^5} \left[\cdots + \left(1 + \frac{1}{3^5} + \cdots + \frac{1}{3^{5l}} + \cdots\right) \frac{1}{z^{5n}} + \right.$$

$$+ \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3^5} + \cdots + \frac{1}{3^{5l}} + \cdots\right) \frac{1}{z^{5n-1}} + \cdots \quad (3)$$

$$+ \frac{1}{3^2} \left(1 + \frac{1}{3^5} + \cdots + \frac{1}{3^{5l}} + \cdots\right) \frac{1}{z^{5n-2}} + \cdots$$

$$+ \frac{1}{3^3} \left(1 + \frac{1}{3^5} + \cdots + \frac{1}{3^{5l}} + \cdots\right) \frac{1}{z^{5n-3}} + \cdots$$

$$+ \frac{1}{3^4} \left(1 + \frac{1}{3^5} + \cdots + \frac{1}{3^{5l}} + \cdots\right) \frac{1}{z^{5n-4}} + \cdots +$$

$$+ \left(1 + \frac{1}{3^5} + \cdots + \frac{1}{3^{5l}} + \cdots\right) \frac{1}{z^5} +$$

$$+ \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3^5} + \cdots + \frac{1}{3^{5l}} + \cdots\right) \frac{1}{z^{5-1}} + \cdots$$

$$+ \frac{1}{3^2} \left(1 + \frac{1}{3^5} + \cdots + \frac{1}{3^{5l}} + \cdots\right) \frac{1}{z^{5-2}} + \cdots$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3^3} \left(1 + \frac{1}{3^5} + \cdots + \frac{1}{3^{5+1}} + \cdots \right) \frac{1}{z^{5-3}} + \\
& + \frac{1}{3^4} \left(1 + \frac{1}{3^5} + \cdots + \frac{1}{3^{5+1}} + \cdots \right) \frac{1}{z^{5-4}} + \\
& + \left(1 + \frac{1}{3^5} + \cdots + \frac{1}{3^{5+1}} + \cdots \right) + \\
& + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3^5} + \cdots + \frac{1}{3^{5+1}} + \cdots \right) z + \\
& + \frac{1}{3^2} \left(1 + \frac{1}{3^5} + \cdots + \frac{1}{3^{5+1}} + \cdots \right) z^2 + \cdots + \\
& + \frac{1}{3^n} \left(1 + \frac{1}{3^5} + \cdots + \frac{1}{3^{5+1}} + \cdots \right) z^n + \cdots \} \\
& = -\frac{1}{3z^5} \left(1 + \frac{1}{3^5} + \cdots + \frac{1}{3^{5+1}} + \cdots \right) \cdot \\
& \cdot \left[\cdots + \frac{1}{z^{5+n}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z^{5+n-1}} + \frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{z^{5+n-2}} + \right. \\
& + \frac{1}{3^3} \cdot \frac{1}{z^{5+n-3}} + \frac{1}{3^4} \cdot \frac{1}{z^{5+n-4}} + \cdots + \\
& + \frac{1}{z^5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z^{5-1}} + \frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{z^{5-2}} + \frac{1}{3^3} \cdot \frac{1}{z^{5-3}} + \\
& \left. + \frac{1}{3^4} \cdot \frac{1}{z^{5-4}} + 1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2} + \cdots + \frac{z^n}{3^n} + \cdots \right] \\
& = -\frac{81}{242z^5} \left[\cdots + \left(\sum_{k=0}^4 \frac{1}{3^k} \cdot \frac{1}{z^{5+n-k}} \right) + \cdots + \right. \\
& \left. + \left(\sum_{k=0}^4 \frac{1}{3^k} \cdot \frac{1}{z^{5-k}} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n} \right] \\
& = -\frac{81}{242z^5} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^4 \frac{1}{3^k} \cdot \frac{1}{z^{5+n-k}} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n} \right]
\end{aligned}$$

$$= -\frac{81}{242} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^4 \frac{1}{3^k} \cdot z^{6(n+1)-k} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+6}} \right].$$

(3) 在 $0 < |z-1| < 1$ 内

$$\begin{aligned} \sin \frac{z}{z-1} &= \sin \left(1 + \frac{1}{z-1} \right) \\ &= \sin 1 \cdot \cos \frac{1}{z-1} + \cos 1 \cdot \sin \frac{1}{z-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n \sin 1}{(2n)! (z-1)^{2n}} + \frac{(-1)^n \cos 1}{(2n+1)! (z-1)^{2n+1}} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{2} + \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2} \sin 1 + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{2} + \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2} \cos 1 \right] \cdot \frac{1}{n! (z-1)^{n+1}}. \end{aligned}$$

(4) 在 $0 < |z| < +\infty$ 内, $e^{\frac{z}{1+\frac{2}{z}}} = e^{1+\frac{z}{2}} = e^{(1+\frac{2}{z})^{-1}}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(1 + \frac{2}{z} \right)^{-n},$$

$$\begin{aligned} \text{而} \left(1 + \frac{2}{z} \right)^{-n} &= 1 - C_n^1 \frac{2}{z} + C_n^2 \frac{2^2}{z^2} + \\ &\quad + \cdots + (-1)^k C_{n+k}^k \frac{2^k}{z^k} + \cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(1 + \frac{2}{z} \right)^{-n} &= 1 + \frac{1}{1!} \cdot \frac{2}{z} + \frac{1}{1!} \cdot \frac{2^2}{z^2} + \\ &\quad + \cdots + (-1)^k \frac{1}{1!} \cdot \frac{2^k}{z^k} + \cdots + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2!} - \frac{1}{2!} C^{\frac{1}{2}} \frac{2}{z} + \frac{1}{2!} C^{\frac{2}{3}} \frac{2^2}{z^2} - \cdots + (-1)^k \frac{1}{2!} C^{\frac{k}{k+1}} \frac{2^k}{z^k} \\
& + \cdots + \frac{1}{3!} - \frac{1}{3!} C^{\frac{1}{3}} \frac{2}{z} + \frac{1}{3!} C^{\frac{2}{4}} \frac{2^2}{z^2} + \cdots + (-1)^k \frac{1}{3!} C^{\frac{k}{k+2}} \frac{2^k}{z^k} + \cdots \\
& + \frac{1}{n!} - \frac{1}{n!} C^{\frac{1}{n}} \frac{2}{z} + \frac{1}{n!} C^{\frac{2}{n+1}} \frac{2^2}{z^2} - \\
& \quad - \cdots + (-1)^k \frac{1}{n!} C^{\frac{k}{n+k-1}} \frac{2^k}{z^k} + \cdots \\
& = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \left[(-1)^k 2^k \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} C^{\frac{k}{n+k-1}} \right) \right] \frac{1}{z^k}.
\end{aligned}$$

(5) 多值函数 z^a 在 $|z+1| < 1$ 的邻域内可分出解析分枝, 取 $z = -1$ 时, 它为 $e^{-a\pi i}$ 的那一枝, 并记为 $(z^a)_0$, 则在 $0 < |z+1| < 1$ 内 ($0 < a < 1$) 有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z^a)_0(1+z)} &= \frac{(-1)^{1-a}}{z+1} \cdot \frac{1}{[1-(1+z)]^a} \\
&= \frac{e^{-a\pi i}}{z+1} [1-(1+z)]^{-a} \\
&= \frac{e^{-a\pi i}}{z+1} \left[1 + (-a)(z+1) + \frac{(-a)(-a-1)}{2!} (z+1)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \cdots + \frac{(-a)(-a-1)\cdots(-a-n+1)}{n!} (z+1)^n + \cdots \right] \\
&= \frac{e^{-a\pi i}}{z+1} \left[a^0 + ae^{-\pi i}(z+1) + \frac{a(a+1)}{2!} e^{-2\pi i} \cdot (z+1)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \cdots + \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{n!} e^{-n\pi i} \cdot (z+1)^n + \cdots \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{-a\pi i}}{z+1} + \frac{a}{1!} e^{-(a+1)\pi i} + \frac{a(a+1)}{2!} e^{-(a+2)\pi i} (z+1) + \dots + \\
&\quad + \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{n!} e^{-(a+n)\pi i} (z+1)^{n-1} + \dots \\
&= \frac{e^{-a\pi i}}{z+1} + \frac{a}{1!} e^{-(a+1)\pi i} + \frac{a(a+1)}{2!} e^{-(a+2)\pi i} (z+1) + \\
&\quad + \dots + \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{n!} e^{-(a+n)\pi i} (z+1)^{n-1} + \dots \\
&= \frac{e^{-a\pi i}}{z+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{n!} e^{-(a+n)\pi i} (z+1)^{n-1}
\end{aligned}$$

(6) 多值函数 $\text{Ln} z$ 在 $|z-1| < 1$ 内可分出解析函数分枝, 取 $\text{Ln} 1 = 0$ 那一分枝, 并记此分枝为 $\ln z$, 则当 $0 < |z-1| < 1$ 时,

$$\begin{aligned}
\frac{\ln z}{z^2-1} &= \frac{1}{z-1} \ln[1+(z-1)] \cdot \frac{1}{2\left(1+\frac{z-1}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{2(z-1)} \left\{ (z-1) + (-1) \frac{(z-1)^2}{2} + \right. \\
&\quad \left. + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n} + \dots \right\} \cdot \left[1 + (-1) \frac{z-1}{2} + \right. \\
&\quad \left. + (-1)^2 \frac{(z-1)^2}{2^2} + \dots + (-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^n} + \dots \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[1 + (-1) \frac{z-1}{2} + \frac{(-1)^2 (z-1)^2}{3} + \dots \right. \\
&\quad \left. + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^{n-1}}{n} + (-1)^n \frac{(z-1)^n}{n+1} + \dots \right] \cdot \left[1 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (-1) \frac{z-1}{2} + (-1)^2 \frac{(z-1)^2}{2^2} + \cdots + (-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^n} + \cdots \Big] \\
& = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (z-1)^k}{k+1} \frac{(-1)^{n-k} (z-1)^{n-k}}{2^{n-k}} \right] \\
& = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^n 2^k}{k+1} \right] \frac{(z-1)^n}{2^n}.
\end{aligned}$$

多值函数 $\text{Ln} z$ 在 $|z+1| < 1$ 内可分出解析函数分枝, 取 $\text{Ln}(-1) = \pi i$ 的那一分枝, 并记此枝为 $\ln z$, 则当 $0 < |z+1| < 1$ 时,

$$\begin{aligned}
& \frac{\ln z}{z^2 - 1} \\
& = \frac{1}{z+1} \left\{ \ln(-1) + \ln\left[1 - (z+1)\right] \right\} \frac{1}{(-2)\left(1 - \frac{z-1}{2}\right)} \\
& = \frac{-1}{2(z+1)} \left\{ \pi i - (z+1) - \frac{1}{2}(z+1)^2 - \cdots - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{n}(z+1)^n - \cdots \right\} \cdot \left(1 + \frac{z+1}{2} + \cdots + \frac{(z+1)^n}{2^n} + \cdots \right) \\
& = \frac{1}{2} \left\{ \frac{-\pi i}{z+1} + 1 + \frac{1}{2}(z+1) + \cdots + \frac{1}{n}(z+1)^{n-1} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{n+1}(z+1)^n + \cdots \right\} \cdot \left(1 + \frac{z+1}{2} + \cdots + \frac{(z+1)^n}{2^n} + \cdots \right) \\
& = -\frac{1}{2} \left\{ \pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^{n-1}}{2^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n \frac{(z+1)^n}{(k+1)2^{n-k}} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

12. 问下列各函数有那些孤立奇点? 各属于哪一种类型?

(1) $\frac{z-1}{z(z^2+4)^{\frac{1}{2}}}$; (2) $\text{ctg} z$; (3) $\frac{2}{\sin z - \sin a}$ (a 为常数);

$$(4) \frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^{\frac{1}{z-1}}-1}, (5) \sin \frac{1}{1-z}.$$

解: (1) $z=0, \pm 2i$ 和 ∞ 是函数的孤立奇点, $z=0$ 是一阶极点, $z=\pm 2i$ 都是二阶极点, $z=\infty$ 是可去奇点.

(2) $z=n\pi (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 是函数的孤立奇点, 是一阶极点, $z=\infty$ 是极点的极限点.

(3) $\sin|z-\sin a$ 的 n 阶零点就是所给函数 n 阶极点. 由三角函数的有关性质可知它的零点是:

$$z_{k_1} = 2k_1\pi + a, \quad z_{k_2} = (2k_2 + 1)\pi - a \\ (k_1, k_2 = 0, \pm 1, \dots)$$

它在 z_{k_1} 和 z_{k_2} 的泰勒展式分别是:

$$\cos a (z - z_{k_1}) - \frac{\sin a}{2!} (z - z_{k_1})^2 + \dots,$$

$$\text{和 } -\cos a (z - z_{k_2}) - \frac{\sin a}{2!} (z - z_{k_2})^2 + \dots.$$

因此, 当 $a = k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ 时, z_{k_1} 和 z_{k_2} 是 $\sin z - \sin a$ 的二阶零点, 从而是所给函数的二阶极点. 当 $a \neq k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ 时, z_{k_1} 和 z_{k_2} 是 $\sin z - \sin a$ 的简单零点, 从而是所给函数的简单极点.

$z=\infty$ 是极点的极限点.

(4) $z=1$ 是本性奇点, $z=2n\pi i (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 是一阶极点, $z=\infty$ 是极点的极限点.

(5) $z=1$ 是本性奇点, $z=\infty$ 是可去奇点.

13. 证明：在扩充复平面上只有一个一阶极点的解析函数 $f(z)$ 必有下面的形式：

$$f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

证：1°，设有限点 z_0 是 $f(z)$ 的唯一的一阶极点，则 $f(z)$ 在 $0 < |z - z_0| < \infty$ 内有如下罗朗展式：

$$f(z) = \frac{C_{-1}}{z - z_0} + C_0 + C_1(z - z_0) + \cdots + C_n(z - z_0)^n + \cdots$$

($C_1 \neq 0$)，由于 $f(z)$ 在 $z = \infty$ 解析，故 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = A$

(A 为有限数) 从而有：

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[f(z) - \frac{C_{-1}}{z - z_0} \right] = A$$

($C_{-1} \neq 0$)，因此 $f(z) - \frac{C_{-1}}{z - z_0}$ 在扩充复平面上解析且有界，根据刘维尔定理， $f(z) - \frac{C_{-1}}{z - z_0} \equiv C$ (C 为常数)，

于是 $f(z) = C + \frac{C_{-1}}{z - z_0} = \frac{Cz + (C_{-1} - Cz_0)}{z - z_0}$ ，且

$$\alpha\delta - \beta\gamma = -Cz - (C_{-1} - Cz_0) \cdot 1 = -C_{-1} \neq 0.$$

2° 设 $z = \infty$ 是 $f(z)$ 的一阶极点，则在 $|z| < \infty$ 内有如下罗朗展式：

$$f(z) = c_1 z + c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \cdots \quad (c_1 \neq 0)$$

由于 $\lim_{z \rightarrow \infty} [f(z) - c_1 z] = \lim_{z \rightarrow \infty} (c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \cdots) = c_0$,

此处 c_0 为有限复数, 故 $f(z) - c_1 z$ 在扩充复平面上解析且有界, 根据刘维尔定理, 有

$$f(z) - c_1 z = c \quad (c \text{ 为常数}). \text{ 从而}$$

$$f(z) = c_1 z + c, \text{ 且 } \alpha\delta - \beta\gamma = c_1 \neq 0.$$

14. 设函数 $f(z)$ 在 $z = z_0$ 解析, 并且不恒等于一常数. 试证 $z = z_0$ 是 $f(z)$ 的 m 阶零点的必要与充分条件是:

$$z = z_0 \text{ 是 } \frac{1}{f(z)} \text{ 的 } m \text{ 阶极点}.$$

证: 必要性: 设 $z = z_0$ 是 $f(z)$ 的 m 阶零点, 则 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内有如下的级数展式:

$$f(z) = C_m (z - z_0)^m + C_{m+1} (z - z_0)^{m+1} + \dots \quad (C_m \neq 0).$$

$$\text{设 } \varphi(z) = C_m + C_{m+1} (z - z_0) + C_{m+2} (z - z_0)^2 + \dots$$

则 $\varphi(z)$ 在 z_0 解析, 且 $\varphi(z_0) \neq 0$, 于是有:

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^m \varphi(z)} = \frac{\psi(z)}{(z - z_0)^m}.$$

其中 $\psi(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$ 在 z_0 解析, 且 $\psi(z_0) \neq 0$. 设 $\psi(z)$ 在 z_0

的幂级数展式为:

$$\psi(z) = \psi(z_0) + \psi'(z_0)(z - z_0) + \dots$$

$$\text{则 } \frac{1}{f(z)} = \frac{\psi(z_0)}{(z - z_0)^m} + \frac{\psi'(z_0)}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots.$$

由于 $\psi(z_0) \neq 0$, $\therefore z = z_0$ 是 $\frac{1}{f(z)}$ 的 m 阶极点.

充分性: 设 $z = z_0$ 是 $\frac{1}{f(z)}$ 的 m 阶极点, 则 $\frac{1}{f(z)}$

在 z_0 的某一个邻域内的罗朗展式为:

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(z)} &= \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{c_{-(m-1)}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots = \\ &= \frac{1}{(z-z_0)^m} [c_{-m} + c_{-m+1}(z-z_0) + \dots],\end{aligned}$$

其中 $c_{-m} \neq 0$. 设 $\varphi(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z-z_0) + \dots$.
显然 $\varphi(z)$ 在 z_0 解析, 且 $\varphi(z_0) \neq 0$, 于是

$$f(z) = (z-z_0)^m \frac{1}{\varphi(z)} = (z-z_0)^m \psi(z).$$

其中 $\psi(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$. 显然 $\psi(z)$ 在 z_0 也解析, 且 $\psi(z_0) \neq 0$.

则 $\psi(z)$ 在 z_0 的某个邻域内有如下的幂级数展式:

$$\psi(z) = \psi(z_0) + \psi'(z_0)(z-z_0) + \dots$$

从而有:

$$f(z) = \psi(z_0)(z-z_0)^m + \psi'(z_0)(z-z_0)^{m+1} + \dots$$

由于 $\psi(z_0) \neq 0$, 故 $z = z_0$ 是 $f(z)$ 的 m 阶零点.

15. 设 $f(z)$ 及 $g(z)$ 满足下列条件之一:

(1) $f(z)$ 及 $g(z)$ 在 z_0 分别有 m 阶及 n 阶零点;

(2) $f(z)$ 及 $g(z)$ 在 z_0 分别有 m 阶及 n 阶极点;

(3) $f(z)$ 在 z_0 解析或有极点, $g(z)$ 在 z_0 有孤立本性奇

点. 试问: $f(z) + g(z)$, $f(z) \cdot g(z)$ 及 $\frac{g(z)}{f(z)}$ 在 z_0 具有什么性质?

解: (1) $\because z_0$ 分别是 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的 m 阶及 n 阶零点,

\therefore 在 z_0 的某个邻域内, 有:

$$f(z) = (z-z_0)^m \varphi(z), \quad \varphi(z_0) \neq 0.$$

$$g(z) = (z - z_0)^n \psi(z), \quad \psi(z_0) \neq 0.$$

其中 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 都在 z_0 的某个邻域内解析.

$$\text{I. } f(z) + g(z)$$

$$= \begin{cases} (z - z_0)^m [\varphi(z) + (z - z_0)^{n-m} \psi(z)], & n > m; \\ (z - z_0)^n [\psi(z) + (z - z_0)^{m-n} \varphi(z)], & m > n; \end{cases}$$

当 $n > m$ 时, $\varphi(z_0) + (z_0 - z_0)^{n-m} \psi(z_0) = \varphi(z_0) \neq 0$;

当 $m > n$ 时, $\psi(z_0) + (z_0 - z_0)^{m-n} \varphi(z_0) = \psi(z_0) \neq 0$.

故 z_0 是 $f(z) + g(z)$ 的 $\min\{m, n\}$ 阶零点,

当 $m = n$ 时, $f(z) + g(z) = (z - z_0)^n [\varphi(z) + \psi(z)]$, 在 z_0 有不低于 n 阶的零点.

$$\text{II. } f(z) \cdot g(z) = (z - z_0)^{m+n} \varphi(z) \cdot \psi(z),$$

$\varphi(z_0) \psi(z_0) \neq 0$, 故 z_0 是 $f(z)g(z)$ 的 $m+n$ 阶零点.

$$\text{III. } \frac{g(z)}{f(z)} = (z - z_0)^{n-m} \frac{\psi(z)}{\varphi(z)}, \quad \frac{\psi(z_0)}{\varphi(z_0)} \neq 0.$$

当 $n > m$ 时, z_0 是它的 $n-m$ 阶零点;

当 $n < m$ 时, z_0 是它的 $m-n$ 阶极点;

当 $n = m$ 时, z_0 是它的可去奇点.

(2) $\because z_0$ 分别是 $f(z)$ 及 $g(z)$ 的 m 阶及 n 阶极点, \therefore 在 z_0 的某个邻域内, 有:

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \varphi(z), \quad \varphi(z_0) \neq 0.$$

$$g(z) = \frac{1}{(z - z_0)^n} \psi(z), \quad \psi(z_0) \neq 0$$

其中 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 在 z_0 的某个邻域内解析, 由此可见:

$$\text{I. } f(z) + g(z)$$

$$\frac{g(z)}{f(z)} = \begin{cases} \frac{1}{(z-z_0)^m} \left[\varphi(z) + (z-z_0)^{m-n} \psi(z) \right], & m > n \\ \frac{1}{(z-z_0)^n} \left[\psi(z) + (z-z_0)^{n-m} \varphi(z) \right], & n > m \end{cases}$$

其中当 $m > n$ 时, $\varphi(z_0) + (z_0 - z_0)^{m-n} \psi(z_0) = \varphi(z_0) \neq 0$,

当 $n > m$ 时, $\psi(z_0) + (z_0 - z_0)^{n-m} \varphi(z_0) = \psi(z_0) \neq 0$.

故当 $m \neq n$ 时, z_0 是 $f(z) + g(z)$ 的 $\max\{m, n\}$ 阶极点,

$$\text{当 } m = n \text{ 时, } f(z) + g(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m} \left[\varphi(z) + \psi(z) \right]$$

z_0 是不高于 m 阶的极点或可去奇点

当 $\varphi(z_0) + \psi(z_0) \neq 0$ 时, 是 m 阶极点,

当 $\varphi(z_0) + \psi(z_0) = 0$ 时, 是低于 m 阶极点或可去奇点.

$$\text{II. } f(z)g(z) = \frac{1}{(z-z_0)^{m+n}} \varphi(z)\psi(z),$$

$\varphi(z_0)\psi(z_0) \neq 0$, 故 z_0 是 $f(z) \cdot g(z)$ 的 $m+n$ 阶极点.

$$\text{I. } \frac{g(z)}{f(z)} = \begin{cases} \frac{1}{(z-z_0)^{n-m}} \frac{\psi(z)}{\varphi(z)}, & n > m, \\ \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^{m-n} \varphi(z)}, & n < m \end{cases} \quad \frac{\psi(z_0)}{\varphi(z_0)} \neq 0.$$

故当 $n > m$ 时, z_0 是 $n-m$ 阶极点;

当 $n < m$ 时, z_0 是 $m-n$ 阶零点;

当 $n = m$ 时, z_0 是可去奇点.

(3) 设 z_0 是 $f(z)$ 的解析点, 则 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$,

而 $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$ 不存在有限或无限的极限, 因此,

$f(z) + g(z)$, $f(z) \cdot g(z)$ 和 $\frac{g(z)}{f(z)}$ 在 z_0 也不存在有限或无限的极限, 所以它们都以 z_0 为本性奇点。

设 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶极点, 则有:

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \varphi(z),$$

其中 $\varphi(z)$ 在 z_0 解析且 $\varphi(z_0) \neq 0$, 又由于 z_0 是 $g(z)$ 的本性奇点, 故可设:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_{-n} (z - z_0)^{-n}.$$

I. $f(z) + g(z)$. 易见 z_0 是它的本性奇点。

II. $f(z) \cdot g(z)$.

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{(z - z_0)^m} g(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^{n-m} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_{-n} (z - z_0)^{-(n+m)}, \end{aligned}$$

$\therefore \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$ 在点 z_0 的罗朗展式有无穷多个负幂项,

从而 z_0 是它的本性奇点, 因此

$$f(z) \cdot g(z) = \varphi(z) \cdot \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$$

以 z_0 为本性奇点。

$$\text{II. } \frac{g(z)}{f(z)}$$

$$\begin{aligned} \because (z-z_0)^m g(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^{n+m} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_{-n} (z-z_0)^{-n+m}. \end{aligned}$$

$\therefore (z-z_0)^m g(z)$ 在 z_0 的罗朗展式中含有无穷多个负幂项，从而 z_0 是它的本性奇点，因此

$$\frac{g(z)}{f(z)} = \frac{(z-z_0)^m g(z)}{\varphi(z)}.$$

以 z_0 为本性奇点。

16. 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，证明：如果对某一点 $z_0 \in D$ 有：

$$f^{(n)}(z_0) = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

那末， $f(z)$ 在 D 内为常数。

证：已知 $f(z)$ 在 D 内解析， $z_0 \in D$ ，则在 z_0 的一个含在 D 内的邻域 $|z-z_0| < r$ 内有：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n.$$

又由于 $f^{(n)}(z_0) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$)，从而在 $|z-z_0| < r$ 内有 $f(z) \equiv f(z_0)$ ，又根据解析函数唯一性定理，知在 D 内恒有 $f(z) = f(z_0)$ ，即 $f(z)$ 在 D 内为常数。

17. 问是否存在满足下列条件，并且在原点解析的函数 $f(z)$ ？

$$(1) \quad f\left(\frac{1}{2n-1}\right) = 0, \quad f\left(-\frac{1}{2n}\right) = -\frac{1}{2n},$$

$$(2) \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n+1};$$

$$(3) \quad f\left(\frac{1}{2n-1}\right) = f\left(\frac{1}{2n}\right) = -\frac{1}{2n}.$$

在这里 $n = 1, 2, 3, \dots$.

解: (1) 由于 $\left\{\frac{1}{2n-1}\right\}$ 及 $\left\{\frac{1}{2n}\right\}$ ($n = 1, 2, \dots$) 都以零为聚点, 由解析函数的唯一性定理, $f(z) = z$ 是在原点解析并满足 $f\left(\frac{1}{2n}\right) = -\frac{1}{2n}$ 的唯一函数, 但这函数不满足条件 $f\left(\frac{1}{2n-1}\right) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$). 因此在原点解析并满足所给条件的函数不存在.

(2) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 以 $z = 0$ 为聚点, 又

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n+1} = -\frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}},$$

由解析函数的唯一性定理, $f(z) = \frac{z}{1+z}$ 是在原点解析并满足所给条件的唯一函数.

(3) 由于 $\left\{\frac{1}{2n}\right\}$ 和 $\left\{\frac{1}{2n+1}\right\}$ ($n = 1, 2, \dots$) 都以 $z = 0$ 为聚点, 根据解析函数的唯一性定理, $f(z) = z$ 是在原点解析并满足 $f\left(\frac{1}{2n}\right) = -\frac{1}{2n}$ 的唯一函数, 但这函数不满足条件

$f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{2^n}$, 因此在原点解析并满足所给条件的函数不存在.

18. 函数 $\sin \frac{1}{1-z}$ 的零点 $1 - \frac{1}{n\pi}$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$)

所成的集有聚点 1, 但这函数不恒等于零, 问这与解析函数的唯一性是否相矛盾?

解: 虽然 $\sin \frac{1}{1-z}$ 在点集 $\left\{1 - \frac{1}{n\pi} \mid n = \pm 1, \pm 2, \dots\right\}$ 上取值为零, 且这点集有唯一的聚点 1, 但点 1 并不在 $\sin \frac{1}{1-z}$ 的解析区域内, 而根据解析函数的唯一性定理, 点集的聚点在函数的解析区域内时, 才能由这点集上的值确定函数在整个解析区域内的值, 因此 $\sin \frac{1}{1-z}$ 不恒等于零, 与解析函数唯一性不矛盾.

19. 设区域 D 内含有一段实轴, 又设函数 $u(x, y) + iv(x, y)$ 及 $u(z, 0) + iv(z, 0)$ 都在 D 内解析. 求证在 D 内:
 $u(x, y) + iv(x, y) = u(z, 0) + iv(z, 0).$

证: 在区域 D 内, 令 $f_1(z) = u(x, y) + iv(x, y)$,
 $f_2(z) = u(z, 0) + iv(z, 0)$. 对于 D 内含有的一段实轴上的每一点 $z = x$, 有 $f_1(x) = f_2(x) = u(x, 0) + iv(x, 0)$. 故依解析函数的唯一性定理知对于 $z \in D$, 有

$$f_1(z) = f_2(z),$$

即 $u(x, y) + iv(x, y) = u(z, 0) + iv(z, 0).$

20. 见第六章习题

(4) 2

第五章 留 数

1. 试求下列解析函数或多值函数的解析分枝在指定各点的留数:

$$(1) \quad \frac{z^2}{(z^2+1)^2}, \text{ 在 } z = \pm i;$$

$$(2) \quad \frac{1}{1-e^z}, \text{ 在 } z = 2n\pi i, \quad n \text{ 为整数};$$

$$(3) \quad \frac{\sqrt{z}}{1-z}, \text{ 在 } z = 1;$$

$$(4) \quad \sin \frac{1}{z-1}, \text{ 在 } z = 1.$$

解: (1) $z = \pm i$ 是 $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2}$ 的二阶极点,

$$\operatorname{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[(z-i)^2 \cdot \frac{z^2}{(z^2+1)^2} \right]$$

$$= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[\frac{z^2}{(z+i)^2} \right] = -\frac{i}{4},$$

$$\operatorname{Res}(f, -i) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{d}{dz} \left[(z+i)^2 \cdot \frac{z^2}{(z^2+1)^2} \right]$$

$$= \lim_{z \rightarrow -i} \frac{d}{dz} \left[\frac{z^2}{(z-i)^2} \right] = \frac{i}{4}.$$

(2) $z = 2n\pi i$ 是 $f(z) = \frac{1}{1 - e^z}$ 的一阶极点,

$$\operatorname{Res}(f, 2n\pi i) = \left(\frac{1}{1 - e^z} \right)' \Big|_{z=2n\pi i} = -1.$$

(3) $z = 1$ 是 $f(z) = \frac{\sqrt{z}}{1 - z}$ 的一阶极点,

$$\operatorname{Res}(f, 1) = \left(\frac{\sqrt{z}}{1 - z} \right)' \Big|_{z=1} = \mp 1$$

(取 $\sqrt{1} = 1$ 的那个分枝时, $\operatorname{Res}(f, 1) = -1$.)

取 $\sqrt{1} = -1$ 的那个分枝时, $\operatorname{Res}(f, 1) = 1$.)

(4) $z = 1$ 是 $\sin \frac{1}{z-1}$ 的本性奇点, 又 $\sin \frac{1}{z-1}$ 在 $z = 1$ 的邻域内的罗朗展式为:

$$\sin \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{z-1} \right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{1}{z-1} \right)^5 - \dots$$

$$\therefore \operatorname{Res} \left(\sin \frac{1}{z-1}, 1 \right) = C_{-1} = 1.$$

2. 函数 $\frac{\operatorname{Ln} z}{z^2 - 1}$ 的各解析分枝在 $z = \pm 1$ 各有怎样的孤立奇点? 求它们在这些点的留数.

解: 在 $z = 1$ 的邻域 $|z - 1| < 1$ 内多值函数 $\operatorname{Ln} z$ 的各解析分枝为:

$$(\operatorname{Ln} z)_k = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi),$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \arg 1 = 0).$$

当 $k=0$ 时, $z=1$ 是 $\frac{(\operatorname{Ln} z)_0}{z^2-1}$ 的可去奇点,

$k=\pm 1, \pm 2, \dots$ 时, $z=1$ 是 $\frac{(\operatorname{Ln} z)_k}{z^2-1}$ 的一阶极点.

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left[\frac{(\operatorname{Ln} z)_k}{z^2-1}, 1\right] &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)}{z^2-1} \\ &= k\pi i; \end{aligned}$$

在 $z=-1$ 的邻域 $|z+1|<1$ 内多值函数 $\operatorname{Ln} z$ 的各解析分枝为:

$(\operatorname{Ln} z)_k = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$
 $\arg(-1)=\pi), z=-1$ 是各解析分枝的一阶极点。

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left[\frac{(\operatorname{Ln} z)_k}{z^2-1}, -1\right] &= \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \frac{\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)}{z^2-1} \\ &= -(k + \frac{1}{2})\pi i. \end{aligned}$$

3. 计算下列积分:

$$(1) \quad \int_C \frac{zdz}{(z-1)(z-2)^2}, \text{ 其中 } C \text{ 是 } |z-2|=\frac{1}{2};$$

$$(2) \quad \int_C \frac{e^z dz}{z^2(z^2-9)}, \text{ 其中 } C \text{ 是 } |z|=1;$$

$$(3) \quad \int_C \operatorname{tg} \pi z dz, \text{ 其中 } C \text{ 是 } |z|=n \ (n=1, 2, 3, \dots).$$

$$\text{解 (1) } f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)^2} \text{ 在 } C: |z-2|=\frac{1}{2}$$

内只有二阶极点 $z=2$, 而 $\operatorname{Res}(f, 2) = -1$. 于是由留数定

理得: $\int_C \frac{zdz}{(z-1)(z-2)^2} = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 2) = -2\pi i.$

(2) $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z^2-9)}$ 在 $C: |z|=1$ 内有二阶极点 $z=0$. 而 $\operatorname{Res}(f, 0) = -\frac{1}{9}$. 故由留数定理得:

$$\int_C \frac{e^z dz}{z^2(z^2-9)} = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0) = -\frac{2}{9}\pi i.$$

(3) $f(z) = \operatorname{tg} \pi z$ 在 $C: |z|=n$ 内包含有 $2n$ 个一阶极

点: $\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots, \pm \frac{2n-1}{2}$. 而

$$\operatorname{Res}\left(\operatorname{tg} \pi z, \pm \frac{2k-1}{2}\right) = \frac{\sin \pi z}{(\cos \pi z)'} \Big|_{z = \pm \frac{2k-1}{2}} = -\frac{1}{\pi}.$$

故由留数定理, 得:

$$\int_C \operatorname{tg} \pi z dz = 2\pi i \cdot 2n \left(-\frac{1}{\pi}\right) = -4ni.$$

4. 设函数 $f(z)$ 在区域 $r_0 < |z| < \infty$ 内解析, C 表示圆 $|z|=r$ ($0 < r_0 < r$). 我们把积分

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$$

定义作为函数 $f(z)$ 在无穷远点的留数, 记作 $\operatorname{Res}(f, \infty)$, 在这里积分中的 C^- 表示积分是沿着 C 按顺时针方向取的. 试证明: 如果 a_{-1} 表示 $f(z)$ 在 $r_0 < |z| < +\infty$ 的罗朗展式中 $\frac{1}{z}$ 的系数, 那末 $\operatorname{Res}(f, \infty) = -a_{-1}$.

证: 在扩充的复平面上, 因为 $f(z)$ 在 $r_0 < |z| < \infty$ 内解

析, 故 $z = \infty$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点. 设 $C: |z| = r$ ($0 < r_0 < r$), 则在 $r < |z| < \infty$ 内 $f(z)$ 有罗朗展式

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

由于它的右端的两个级数在 C 上一致收敛, 故可沿 C^- 逐项积分, 而得

$$\int_{C^-} f(z) dz = a_{-1} \int_{C^-} \frac{dz}{z} = -a_{-1} \cdot 2\pi i.$$

$$\therefore \operatorname{Res}(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} f(z) dz = -a_{-1}.$$

5. 试求下列函数在无穷远点的留数:

$$(1) \frac{1}{z}, \quad (2) e^{\frac{1}{z}}, \quad (3) \frac{1}{(z^5 - 1)(z - 3)}.$$

$$\text{解: } (1) a_{-1} = 1, \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z}, \infty\right) = -1.$$

$$(2) \because e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} + \dots,$$

$$\therefore a_{-1} = 1, \operatorname{Res}(e^{\frac{1}{z}}, \infty) = -1.$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \frac{1}{(z^5 - 1)(z - 3)} &= \frac{1}{z^5(1 - \frac{1}{z^5})(1 - \frac{3}{z})} \\ &= \frac{1}{z^5} \left[1 + \frac{1}{z^5} + \left(\frac{1}{z^5}\right)^2 + \dots \right] \left[1 + \frac{3}{z} + \left(\frac{3}{z}\right)^2 + \dots \right] \end{aligned}$$

$$\text{显然 } a_{-1} = 0, \therefore \operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z^5 - 1)(z - 3)}, \infty\right] = 0.$$

6. 试把关于留数的基本定理 1.1 转移到 D 是扩充复平面上含无穷远点区域情形。

解：定理 1.1'。设 D 是复平面上含无穷远点的区域，其边界 C 是由有限条互不包含也互不相交的简单闭曲线 c_1, c_2, \dots, c_m 组成的： $c = c_1 + c_2 + \dots + c_m$ 。

又设 $f(z)$ 在 \bar{D} 上除去孤立奇点 z_1, z_2, \dots, z_n 及无穷远点外解析。则

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \left[\sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, z_k) + \operatorname{Res}(f, \infty) \right].$$

证：设 c_0 是一个以原点为心的充分大的圆，使得 $f(z)$ 的所有有限奇点 z_1, z_2, \dots, z_n 以及边界 C 都在 c_0 的内区域内，于是由留数基本定理 1.1，得：

$$\int_{c_0+c} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, z_k).$$

$$\text{即有 } \int_{c_0} f(z) dz + \int_c f(z) dz = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, z_k).$$

$$\text{又 } \because \operatorname{Res}(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{c_0} f(z) dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_{c_0} f(z) dz$$

$$\therefore \int_C f(z) dz = 2\pi i \left[\sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, z_k) + \operatorname{Res}(f, \infty) \right].$$

7. 证明：如果 $f(z)$ 在复平面上除了有限个奇点外，在每一点解析，那末这函数在所有奇点上的留数（包括在无穷远点的留数）之和是零。

用此结果计算积分

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2} \frac{dz}{(z^5-1)(z-3)}.$$

证：以原点为心作任意大圆 C ，使 $f(z)$ 的所有奇点 z_1, z_2, \dots, z_k （除 ∞ 外）都包含在这个大圆 C 的内区域内，根据留数定理得：

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = \sum_{n=1}^k \operatorname{Res}(f, z_n).$$

$$\text{又 } \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} f(z) dz = \operatorname{Res}(f, \infty),$$

$$\text{而 } \int_C f(z) dz + \int_{C^-} f(z) dz = 0.$$

$$\text{因此 } \sum_{n=1}^k \operatorname{Res}(f, z_n) + \operatorname{Res}(f, \infty) = 0.$$

$$\text{记 } I = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2} \frac{1}{(z^5-1)(z-3)},$$

则 I 等于 $\frac{1}{(z^5-1)(z-3)}$ 在 $|z|=2$ 内的所有奇点的留数之

和。但它在 $|z|=2$ 外还有一阶极点 $z=3$ 和可去奇点 $z=\infty$ 。

$$\text{故有： } I + \operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z^5-1)(z-3)}, 3\right] +$$

$$+ \operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z^5-1)(z-3)}, \infty\right] = 0.$$

$$\text{显然 } \operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z^5-1)(z-3)}, 3\right] = \frac{1}{3^5-1} \text{ 又由题 5 (3) 知}$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z^5-1)(z-3)}, \infty\right]=0$$

$$\therefore I = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2} \frac{dz}{(z^5-1)(z-3)} = -\frac{1}{3^5-1} = -\frac{1}{242}.$$

8. 求下列各积分:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2},$$

解: 这一积分显然收敛, 函数 $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2}$

在上半平面只有一个极点 $z=i$. 由题 1 (1) 知:

$$\operatorname{Res}(f, i) = -\frac{i}{4}$$

作以 O 为圆心, r 为半径的圆盘, 考虑这一圆盘在上半平面的部分, 设其边界为 C_r (如图 5.1).

取 $r>1$, 那么 $z=i$ 包含在 C_r 的区域内, 沿 C_r 取 $\frac{z^2}{(z^2+1)^2}$ 的积分, 根据留数定理, 有:

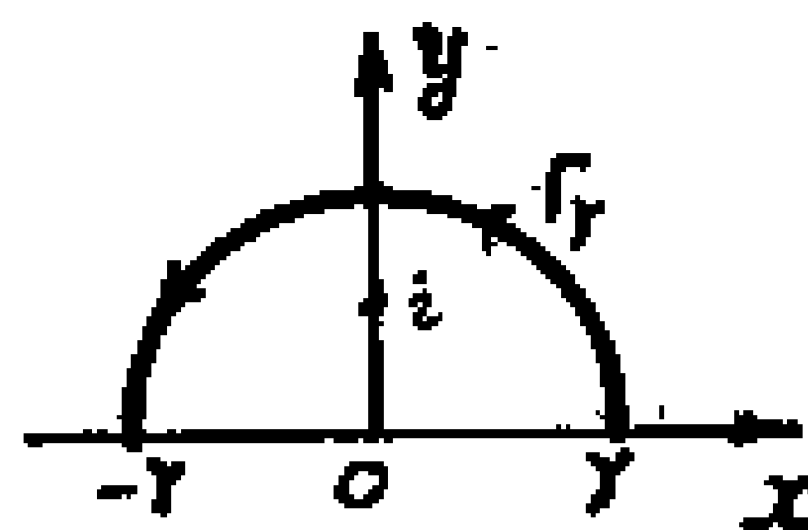


图 5.1

$$\begin{aligned} & \int_{-r}^r \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2} + \int_{\Gamma_r} \frac{z^2 dz}{(z^2+1)^2} \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}(f, i) = 2\pi i \left(-\frac{i}{4}\right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (*)$$

其中 Γ_r 表示 C_r 上的圆弧部分, 沿它的积分是按幅角增加的方向取的.

现在估计 (*) 式左边第二个积分, 我们有

$$\left| \int_{\Gamma_r} \frac{z^2 dz}{(z^2+1)^2} \right| \leq \frac{r^2}{(r^2-1)^2} \cdot \pi r$$

因此 $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_r} \frac{z^2 dz}{(z^2 + 1)^2} = 0$.

在 (•) 式中令 $r \rightarrow \infty$, 就得到:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

从而有: $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi}{4}$.

$$(2) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2}, \text{ 其中 } 0 < a < 1.$$

解: 由于 $0 < a < 1$, 被积函数的分母

$$1 - 2a \cos \theta + a^2 = (1 - a)^2 + 2a(1 - \cos \theta)$$

在 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 内不为零, 因而积分是有意义的.

$$\text{令 } z = e^{i\theta}, \text{ 则 } \cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{z + z^{-1}}{2},$$

$d\theta = \frac{dz}{iz}$. 当 θ 由 0 变到 2π 时, z 按反时针方向绕圆

$C: |z| = 1$ 一周, 因此:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} \\ &= \int_{|z|=1} \frac{1}{1 - 2a \cdot \frac{z + z^{-1}}{2} + a^2} \cdot \frac{dz}{iz} \\ &= \int_{|z|=1} \frac{dz}{i(z - az^2 - a + a^2z)} \\ &= \int_{|z|=1} \frac{dz}{i(1 - az)(z - a)} \end{aligned}$$

被积函数的两个极点 $z = a$, $\frac{1}{a}$ 中, 只有 $z = a$ 在 $|z| = 1$ 内, 它是一阶极点, 而

$$\begin{aligned} & \operatorname{Res}\left[i(1-az)\frac{1}{(z-a)}, a\right] \\ &= \lim_{z \rightarrow a} \left[(z-a) \cdot i(1-az)\frac{1}{(z-a)}\right] = \frac{1}{i(1-a^2)} \end{aligned}$$

因此由留数定理, 得:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2} = 2\pi i \cdot \frac{1}{i(1-a^2)} = \frac{2\pi}{1-a^2}.$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a+\sin^2 x}, \text{ 其中 } a > 0.$$

$$\text{解: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a+\sin^2 x} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a+\sin^2 x}$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(1+2a)-\cos 2x} = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{(1+2a)-\cos \theta}$$

令 $z = e^{i\theta}$, 则 $\cos \theta = \frac{z+z^{-1}}{2}$, $dz = \frac{dz}{iz}$ 当 θ 由 $-\pi$ 变到 π

时, z 依反时针方向绕圆 $C: |z| = 1$ 一周, 从而有:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{(1+2a)-\cos \theta} = i \int_C \frac{dz}{z^2 - 2(2a+1)z + 1} \\ &= i \int_C \frac{dz}{(z-a)(z-\beta)}, \text{ 其中 } a = (2a+1) + \sqrt{(2a+1)^2 - 1}, \end{aligned}$$

$\beta = (2a+1) - \sqrt{(2a+1)^2 - 1}$ 是被积函数的一阶极点, 显然 $a > 1$, $\beta < 1$. 故被积函数的两个极点中只有 β 在 C 内, 而

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)}, \beta\right] = \frac{1}{\beta-\alpha} = -\frac{1}{4\sqrt{a(a+1)}}$$

因此由留数定理得:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a + \sin^2 x} &= i \int_C \frac{dz}{(z-\alpha)(z-\beta)} \\ &= i \cdot 2\pi i \left(-\frac{1}{4\sqrt{a(a+1)}} \right) = \frac{\pi}{2\sqrt{a(a+1)}}. \end{aligned}$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx;$$

解: 此积分显然收敛, 取 $r > 0$ 我们有:

$$\begin{aligned} \int_0^r \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx &= \int_0^r \frac{x(e^{ix} - e^{-ix})}{2i(x^2 + 1)} dx \\ &= \frac{1}{2i} \int_{-r}^r \frac{x e^{ix}}{x^2 + 1} dx \quad (*) \end{aligned}$$

函数 $f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2 + 1}$ 在 $y \geq 0$ 上除有一阶极点 $z = i$ 外,

在其它每一点都解析, 而 $\operatorname{Res}(f, i) = \frac{ze^{iz}}{(z^2 + 1)'} \Big|_{z=i} = \frac{1}{2e}$

取 $r > 1$, 作如图 5.1 中那样的区域, 于是根据留数定理, 有:

$$\int_{-r}^r \frac{xe^{ix}}{x^2 + 1} dx + \int_{\Gamma_r} \frac{ze^{iz}}{z^2 + 1} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i)$$

$$\text{即 } \int_{-r}^r \frac{xe^{ix}}{x^2 + 1} dx + \int_{\Gamma_r} \frac{ze^{iz}}{z^2 + 1} dz = \frac{\pi i}{e} \quad (**)$$

其中 Γ_r 的意义及沿它的积分方向都同题 8 (1) 中所述.

取 $g(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$, $r_0 = 2$, 那末在引理 3.1 中所设条件显然满足, 从而

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_r} \frac{ze^{iz}}{z^2 + 1} dz = 0$$

在 (**) 式中令 $r \rightarrow +\infty$ 得:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \frac{xe^{ix}}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi i}{e}.$$

从而由 (*) 式有:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2i} \frac{\pi i}{e} = \frac{\pi}{2e}.$$

$$(5) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2 + 1)} dx,$$

解: 此积分显然收敛.

解法一: 取 ε 及 r , 使 $r > \varepsilon > 0$, 有:

$$\begin{aligned} & \int_{\varepsilon}^r \frac{\sin x}{x(x^2 + 1)} dx \\ &= -\frac{i}{2} \left[\int_{\varepsilon}^r \frac{e^{ix}}{x(x^2 + 1)} dx + \int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x(x^2 + 1)} dx \right] \quad (*) \end{aligned}$$

函数 $f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2 + 1)}$ 在 $y \geq 0$ 上除去有一阶极点 $z = 0$ 和 $z = i$ 外, 在其它每一点都解析, 而

$$\operatorname{Res}(f, i) = -\frac{e^{iz}/z}{(z^2 + 1)'} \Big|_{z=i} = -\frac{1}{2e}.$$

作如图 5.2 所示的区域, 其中 $r > 1$, 于是根据留数定理有:

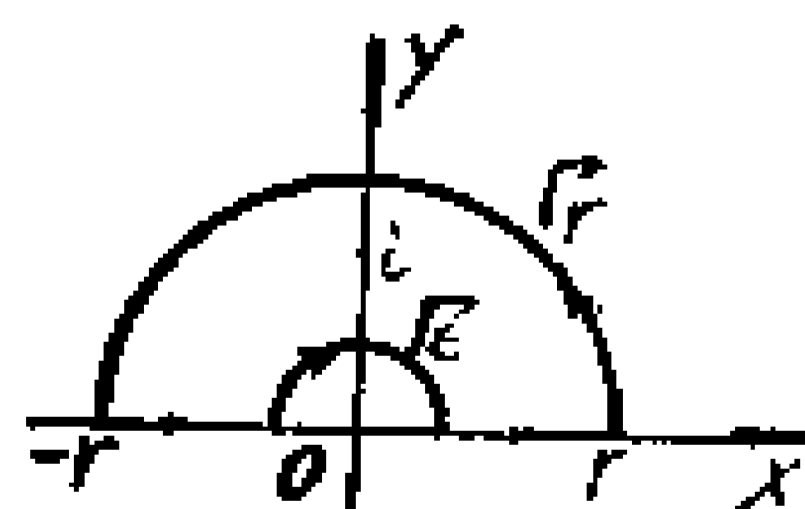


图 5.2

$$\begin{aligned}
 & \int_{\varepsilon}^r \frac{e^{ix}}{x(x^2+1)} dx + \\
 & + \int_{\Gamma_r} \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)} dz + \\
 & + \int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x(x^2+1)} dx + \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)} dz \\
 & = 2\pi i \operatorname{Res} \left[\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}, i \right] = 2\pi i \left(-\frac{1}{2e} \right) \\
 & = -\frac{\pi i}{e}. \quad (**)
 \end{aligned}$$

在这里沿 Γ_{ε} 及 Γ_r 的积分分别是按幅角减小及增加方向取的,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)} dz &= \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \left[\frac{1}{z} + h(z) \right] dz \\
 &= \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \frac{dz}{z} + \int_{\Gamma_{\varepsilon}} h(z) dz = -\pi i + \int_{\Gamma_{\varepsilon}} h(z) dz.
 \end{aligned}$$

其中 $h(z)$ 在 $z=0$ 解析, 因而在 $z=0$ 的一个邻域内 $|h|$ 有上界 M , 于是当 ε 充分小时, 有:

$$\left| \int_{\Gamma_{\varepsilon}} h(z) dz \right| \leq M \cdot 2\pi\varepsilon.$$

因此有 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$.

应用引理 3.1, 知 $\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_r} \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)} dz = 0$. 在 (**))

式中, 令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 及 $r \rightarrow \infty$, 结合 (*) 式可见:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)} dx &= -\frac{i}{2} \left(-\frac{\pi i}{e} + \pi i \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right). \end{aligned}$$

解法二: $\frac{\sin x}{x(x^2+1)} = \frac{\sin x}{x} - \frac{x \sin x}{x^2+1}$.

由书中 P. 117 例 4: $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

又由 8 (4) 题: $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2e}$.

$$\therefore \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)} dx = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right).$$

(6) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x^2+1)^2} dx$.

解法一: 考虑多值函数 $\frac{\operatorname{Ln} z}{(z^2+1)^2}$, 在复平面上取正实轴作割线得一个区域, 在这一区域内, 除去 $z = \pm i$, 在所得区域内, 这函数可以分成解析分枝, 取在割线上沿取实值的一枝, 并且用 $f(z) = \frac{\ln z}{(z^2+1)^2}$ 表示它.

把 $f(z)$ 沿着如图 5.2 所示的一条闭曲线 $c(r, \varepsilon)$ 积分, 在 $c(r, \varepsilon)$ 的内区域内, $f(z)$ 只有一个二阶极点 $z = i$,

且 $\operatorname{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[\frac{\ln z}{(z+i)^2} \right] = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} + i \right).$

根据留数定理, 得:

$$\begin{aligned}
& \int_{\varepsilon}^r \frac{\ln x}{(x^2+1)^2} dx + \int_{\Gamma_r} \frac{\ln z}{(z^2+1)^2} dz + \\
& + \int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{\ln|x| + \pi i}{(x^2+1)^2} dx + \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \frac{\ln z}{(z^2+1)^2} dz \\
& = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi i}{2} - 1 \right). \quad (*)
\end{aligned}$$

考虑 (*) 式内第二个和第四个积分, 我们有:

$$\left| \int_{\Gamma_r} \frac{\ln z}{(z^2+1)^2} dz \right| \leq \frac{\ln r + \pi}{(r^2-1)^2} \pi r, \quad (r > 1)$$

$$\left| \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \frac{\ln z}{(z^2+1)^2} dz \right| \leq \frac{-\ln \varepsilon + \pi}{(1-\varepsilon^2)^2} \pi \varepsilon, \quad (0 < \varepsilon < 1).$$

故 $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_r} \frac{\ln z}{(z^2+1)^2} dz = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \frac{\ln z}{(z^2+1)^2} dz = 0$

再考虑 (*) 式内第三个积分,
这积分经实数代换 $x = -t$ 后变为

$$\int_{\varepsilon}^r \frac{\ln t + i\pi}{(t^2+1)^2} dt.$$

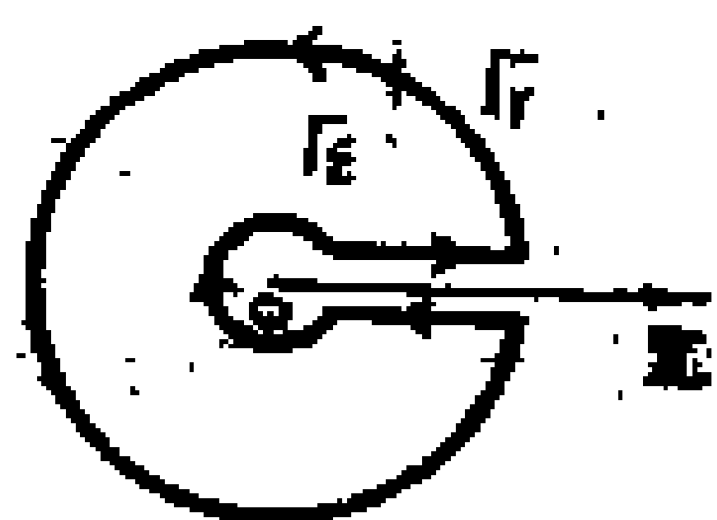


图 3.5

于是, 在 (*) 式内令 $r \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0$ 即得:

$$\begin{aligned}
& 2 \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x^2+1)^2} dx + i\pi \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} \\
& = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi i}{2} - 1 \right),
\end{aligned}$$

但由书中 P. 114 例 2, 已知 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{4},$

故最后得: $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x^2+1)^2} dx = -\frac{\pi}{4}.$

解法二：考虑多值函数 $\frac{(\operatorname{Ln} z)^2}{(z^2+1)^2}$ ，取正实轴作割线，

用 $f(z) = \frac{(\ln z)^2}{(z^2+1)^2}$ 表示在割线上沿取实值的那个分枝，选取积分闭围线 $c(r, \varepsilon)$ ($0 < \varepsilon < 1, r > 1$) 如图 5.3 所示， $f(z)$ 在 $c(r, \varepsilon)$ 内有二阶极点 $z = \pm i$ ，且

$$\operatorname{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[\frac{(\ln z)^2}{(z+i)^2} \right] = \frac{\pi^2 i - 4\pi}{16},$$

$$\operatorname{Res}(f, -i) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{d}{dz} \left[\frac{(\ln z)^2}{(z-i)^2} \right] = \frac{12\pi - 9\pi^2 i}{16}$$

根据留数定理，得：

$$\begin{aligned} & \int_{\varepsilon}^r \frac{(\ln x)^2}{(x^2+1)^2} dx + \int_{\Gamma_r} \frac{(\ln z)^2}{(z^2+1)^2} dz + \\ & + \int_r^{\varepsilon} \frac{(\ln x + 2\pi i)^2}{(x^2+1)^2} dx + \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \frac{(\ln z)^2}{(z^2+1)^2} dz \\ & = 2\pi i [\operatorname{Res}(f, i) + \operatorname{Res}(f, -i)] \\ & = 2\pi i \left(\frac{\pi^2 i - 4\pi}{16} + \frac{12\pi - 9\pi^2 i}{16} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{即} \quad & -4\pi i \int_{\varepsilon}^r \frac{\ln x}{(x^2+1)^2} dx + 4\pi^2 \int_{\varepsilon}^r \frac{dx}{(x^2+1)^2} + \\ & + \left(\int_{\Gamma_r} + \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \right) \frac{(\ln z)^2}{(z^2+1)^2} dz = \pi^2 i + \pi^3. \quad (*) \end{aligned}$$

$$\text{又} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_r} \frac{(\ln z)^2}{(z^2+1)^2} dz = 0.$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{(\ln z)^2}{(z^2 + 1)^2} dz = 0,$$

从而在 (*) 式中令 $r \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$, 则有:

$$\begin{aligned} & -4\pi i \int_0^\infty \frac{\ln x}{(x^2 + 1)^2} dx + 4\pi^2 \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} \\ & = \pi^2 i + \pi^3. \end{aligned}$$

比较虚部即得: $\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x^2 + 1)^2} dx = -\frac{\pi}{4}.$

$$(7) \int_0^\infty \frac{x^{1-a}}{1+x^2} dx, \text{ 其中 } 0 < a < 2.$$

解: 考虑多值函数: $\frac{z^{1-a}}{1+z^2}$, 在复平面上取正实轴作割线得一区域, 在这区域里除去 $z = \pm i$ 后所得区域内, 这函数可分成解析分枝, 取在割线上沿取正实值的那枝, 并用

$$f(z) = \frac{(z^{1-a})_0}{1+z^2} \text{ 表示它.}$$

把 $f(z)$ 沿着如图 5.3 所示的闭曲线 $c(r, \varepsilon)$ 积分, $(0 < \varepsilon < 1, r > 1)$, $f(z)$ 在 $c(r, \varepsilon)$ 内区域有两个一阶极点 $z = \pm i$, 且

$$\operatorname{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{(z^{1-a})_0}{(z - i)(z + i)} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}i(1-a)}}{2i};$$

$$\operatorname{Res}(f, -i) = \lim_{z \rightarrow -i} (z + i) \frac{(z^{1-a})_0}{(z + i)(z - i)} = \frac{e^{\frac{3\pi}{2}i(1-a)}}{-2i}$$

又在正实轴的下沿, $f(z) = e^{2\pi i(1-a)} |z|^{1-a}$. 根据留数定理, 显然有:

$$\begin{aligned}
& [1 - e^{2\pi i(1-a)}] \int_0^r \frac{x^{1-a}}{1+x^2} dx + \int_{\Gamma_r} \frac{(z^{1-a})_0}{1+z^2} dz + \\
& + \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{(z^{1-a})_0}{1+z^2} dz = 2\pi i [Res(f, i) + Res(f, -i)] \\
& = \pi e^{(1-a)\frac{\pi}{2}i} [1 - e^{(1-a)\pi i}] \quad (*)
\end{aligned}$$

$$\text{又} \left| \int_{\Gamma_r} \frac{(z^{1-a})_0}{1+z^2} dz \right| \leq \frac{r^{1-a}}{r^{2-a}} \cdot 2\pi r = \frac{r^{-a}}{1 - \frac{1}{r^2}} \cdot 2\pi,$$

$$\left| \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{(z^{1-a})_0}{1+z^2} dz \right| \leq \frac{\varepsilon^{1-a}}{1 - \varepsilon^2} \cdot 2\pi \varepsilon = \frac{\varepsilon^{2-a}}{1 - \varepsilon^2} \cdot 2\pi,$$

由于 $0 < a < 2$, 故得:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_r} \frac{(z^{1-a})_0}{1+z^2} dz = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{(z^{1-a})_0}{1+z^2} dz = 0,$$

于是在 (*) 式中令 $r \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$, 则有:

$$\begin{aligned}
& [1 - e^{2\pi i(1-a)}] \int_0^\infty \frac{x^{1-a}}{1+x^2} dx \\
& = \pi e^{(1-a)\frac{\pi}{2}i} [1 - e^{(1-a)\pi i}]
\end{aligned}$$

$$\text{因此} \int_0^\infty \frac{x^{1-a}}{1+x^2} dx = \frac{\pi e^{(1-a)\frac{\pi}{2}i} [1 - e^{(1-a)\pi i}]}{1 - e^{2\pi i(1-a)}} =$$

$$= \frac{\pi e^{(1-a)\frac{\pi}{2}i}}{1 + e^{\pi i(1-a)}} = \frac{\pi}{2 \cos \frac{(1-a)\pi}{2}} = \frac{\pi}{2 \sin \frac{a\pi}{2}}.$$

$$(8) \int_0^{+\infty} \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} dx, \text{ 其中 } -\pi < a < \pi.$$

解：此积分收敛，考虑
函数

$$f(z) = \frac{e^{az}}{e^{\pi z} - e^{-\pi z}}$$

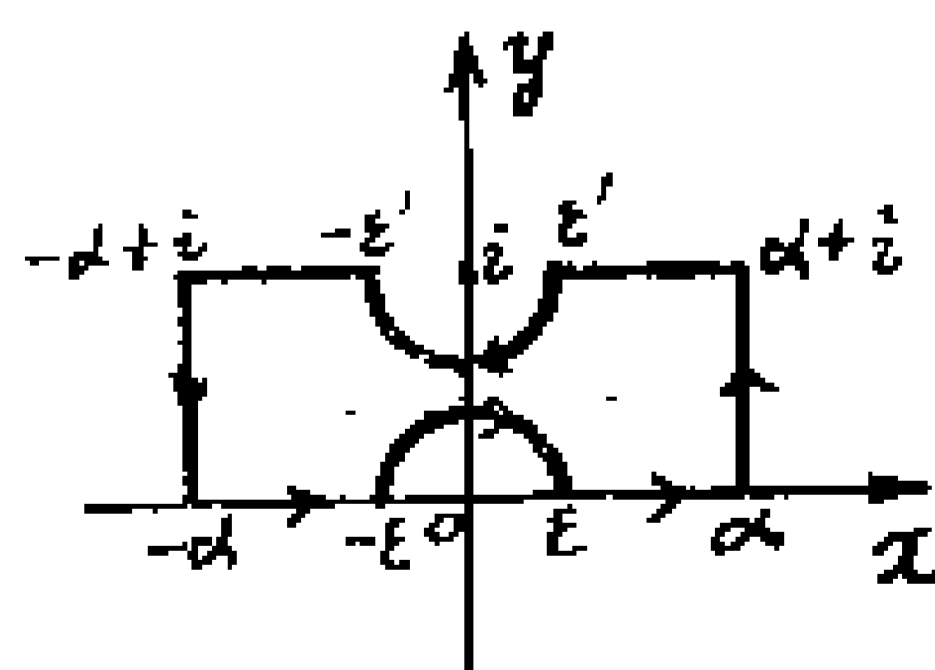


图5.4

并取积分路线 c 如图5.4

$(0 < \varepsilon', \varepsilon' < \frac{1}{2})$ 因它在 c 的
内区域解析，故依柯西定理有：

$$\begin{aligned} & \int_{-a}^{-\varepsilon} f(x) dx + \int_{\varepsilon}^a f(x) dx + \int_a^{a+i} f(x+i) dx + \\ & + \int_{-\varepsilon'}^{-a} f(x+i) dx + i \int_0^1 f(a+iy) dy + \\ & + i \int_1^0 f(-a+iy) dy + \int_{c_\varepsilon} f(z) dz + \int_{c_{\varepsilon'}} f(z) dz = 0 \quad (*) \end{aligned}$$

由 $\int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{e^{ax}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} dx = \int_{\varepsilon}^a \frac{-e^{-ax}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} dx$ ，得：

$$\left(\int_{-a}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^a \right) f(x) dx = \int_{\varepsilon}^a \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} dx,$$

$$\left(\int_{-\varepsilon'}^{-a} + \int_a^{a+i} \right) f(x+i) dx = e^{a1} \int_{\varepsilon'}^a \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} dx.$$

$$\text{又} \left| i \int_0^1 f(a+iy) dy \right| \leq \frac{e^a}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}} = \frac{1}{e^{(\pi-a)a} - e^{-(\pi+a)a}},$$

$$\left| i \int_0^1 f(-a+iy) dy \right| \leq \frac{e^{-a}}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}} =$$

$$= \frac{1}{e^{(\pi+a)a} - e^{-(\pi-a)a}};$$

$$\begin{aligned}\int_{c_\varepsilon} f(z) dz &= \int_{c_\varepsilon} \left[\frac{1}{2\pi z} + h(z) \right] dz \\ &= -\frac{1}{2}i + \int_{c_\varepsilon} h(z) dz,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{c_{\varepsilon'}} f(z) dz &= \int_{c_{\varepsilon'}} \left[-\frac{e^{a i}}{2\pi} \cdot \frac{1}{z-i} + k(z) \right] dz = \\ &= \frac{e^{a i}}{2} i + \int_{c_{\varepsilon'}} k(z) dz.\end{aligned}$$

其中 $h(z)$ 和 $k(z)$ 分别在点 0 和点 i 的充分小的邻域内解析.

当 $a \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{1}{e^{(a-\varepsilon)a} - e^{-(a-\varepsilon)a}}$ 和 $\frac{1}{e^{(a+\varepsilon)a} - e^{-(a+\varepsilon)a}}$ 都趋于 0;

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $\int_{c_\varepsilon} h(z) dz$ 和 $\int_{c_{\varepsilon'}} k(z) dz$ 都趋于 0, 因此在 (*)

式中令 $\varepsilon \rightarrow 0$, $a \rightarrow +\infty$ 时得:

$$\begin{aligned}& \int_0^{+\infty} \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} dx + e^{a i} \int_0^{+\infty} \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} dx = \\ &= -\frac{1}{2}i + \frac{e^{a i}}{2} i = 0,\end{aligned}$$

$$\text{即 } (1 + \cos a + i \sin a) \int_0^{+\infty} \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \sin a + \frac{i}{2} (1 - \cos a),$$

比较虚部得:

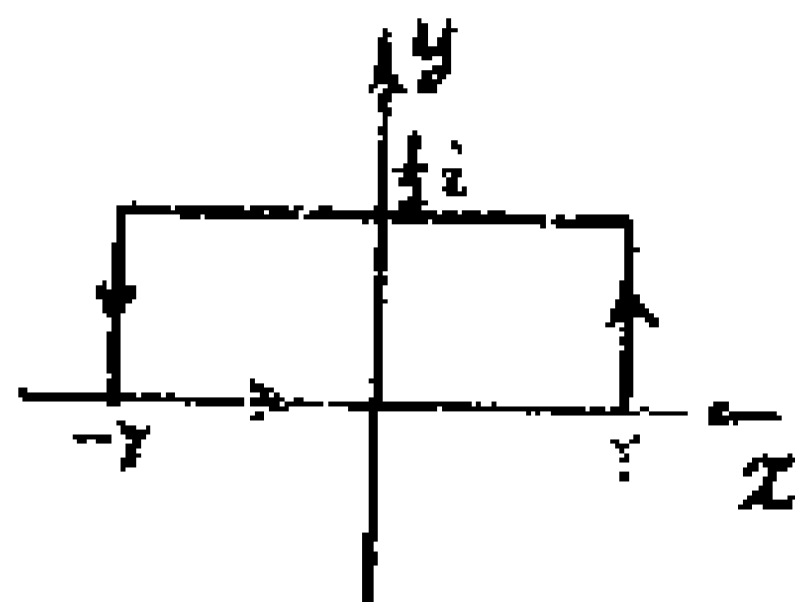
$$\sin a \int_0^{\infty} \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} dx = \frac{1}{2} (1 - \cos a).$$

因此
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} dx = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{a}{2}.$$

$$(9) \int_0^{\infty} \frac{x}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} dx.$$

解：此积分显然收敛。

考虑 $f(z) = \frac{z}{e^{\pi z} - e^{-\pi z}},$



(图5.5)

$z=0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点，从而适当补充 $f(0)$ 的定义后， $f(z)$

在如图 5.5 所示的闭矩形上解析。根据柯西定理得：

$$\begin{aligned} & \int_{-r}^r f(x) dx + i \int_0^{\frac{1}{2}} f(r + iy) dy + \\ & + \int_r^{-r} f\left(x + \frac{i}{2}\right) dx + i \int_{\frac{1}{2}}^0 f(-r + iy) dy = 0 \quad (*) \end{aligned}$$

类似于题 8 (8) 有：

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left[i \int_0^{\frac{1}{2}} f(r + iy) dy \right] = 0,$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left[i \int_{\frac{1}{2}}^0 f(-r + iy) dy \right] = 0,$$

$$\text{又 } \int_{-r}^r f\left(x + \frac{i}{2}\right) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-r}^r \frac{x + \frac{i}{2}}{e^{\pi x + \frac{1}{2}\pi i} - e^{-\pi x - \frac{1}{2}\pi i}} dx \\
&= \frac{1}{i} \int_{-r}^r \frac{x + \frac{i}{2}}{e^{\pi x} + e^{-\pi x}} dx \\
&= \frac{1}{i} \int_{-r}^r \frac{x}{e^{\pi x} + e^{-\pi x}} dx + \frac{1}{2} \int_{-r}^r \frac{dx}{e^{\pi x} + e^{-\pi x}} \\
&= 0 + \frac{1}{2} \int_{-r}^r \frac{e^{\pi x}}{1 + e^{2\pi x}} dx = \frac{1}{4\pi} \int_{-2\pi r}^{2\pi r} \frac{e^{\frac{t}{2}}}{1 + e^t} dt.
\end{aligned}$$

由书中 $P.119(4.1')$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{bu}}{1+u} du = \frac{\pi}{\sin \pi b} \quad \text{知:}$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-2\pi r}^{2\pi r} \frac{e^t}{1+e^t} dt = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}} = \pi.$$

从而 $\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r f\left(x + \frac{i}{2}\right) dx = \frac{1}{4}.$

因此在(•)式中令 $r \rightarrow +\infty$, 则有 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} dx = \frac{1}{4}.$

又由于 $\frac{x}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}}$ 是偶函数,

故得: $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} dx = \frac{1}{8}.$

$$(10) \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$$

解：此积分显然收敛。

$$\begin{aligned} \text{解法一：} \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx &= \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos 2x}{2x^2} dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx. \end{aligned} \quad (**)$$

令 $f(z) = \frac{1 - e^{iz}}{z^2}$ ，考虑它沿如图 5.2 所示的闭围线积分。

由于 $f(z)$ 在所围区域上解析，故由柯西定理得：

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^r \frac{1 - e^{ix}}{x^2} dx + \int_{\Gamma_r} \frac{1 - e^{iz}}{z^2} dz + \\ + \int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{1 - e^{ix}}{x^2} dx + \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \frac{1 - e^{iz}}{z^2} dz = 0 \end{aligned} \quad (***)$$

在这里沿 Γ_{ε} 及沿 Γ_r 的积分分别是按幅角减小及增加的方向取的。

考虑 (**) 式中第一个和第三个积分之和：

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{1 - e^{ix}}{x^2} dx &= \int_{\varepsilon}^r \frac{1 - e^{-ix}}{x^2} dx, \\ \therefore \int_{\varepsilon}^r \frac{1 - e^{ix}}{x^2} dx + \int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{1 - e^{ix}}{x^2} dx &= \\ &= \int_{\varepsilon}^r \frac{2 - (e^{ix} + e^{-ix})}{x^2} dx = \end{aligned}$$

$$= 2 \int_{\varepsilon}^r \frac{1 - \cos x}{x^2} dx.$$

现在求 (**) 式中第二个积分当 $r \rightarrow \infty$ 时的极限:

$$\because \left| \int_{\Gamma_r} \frac{dz}{z^2} \right| \leq \frac{\pi r}{r^2} = \frac{\pi}{r}, \quad \therefore \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_r} \frac{dz}{z^2} = 0;$$

$$\text{又依引理 3.1.} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_r} \frac{e^{iz}}{z^2} dz = 0,$$

$$\text{故} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_r} \frac{1 - e^{iz}}{z^2} dz = 0.$$

再求当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时 $\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1 - e^{iz}}{z^2} dz$ 的极限。当 $z \neq 0$ 时,

$$\frac{1 - e^{iz}}{z^2} = -\frac{i}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} iz - \dots = -\frac{i}{z} + h(z),$$

其中 $h(z)$ 在 $z=0$ 解析。

$$\begin{aligned} \text{故} \quad \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1 - e^{iz}}{z^2} dz &= \int_{\Gamma_\varepsilon} \left(-\frac{i}{z} \right) dz + \\ &+ \int_{\Gamma_\varepsilon} h(z) dz = -\pi + \int_{\Gamma_\varepsilon} h(z) dz. \end{aligned}$$

由于 $h(z)$ 在 $z=0$ 解析, 故在 $z=0$ 的一个邻域内, $|h(z)| \leq M$,

$$\text{于是当 } \varepsilon \text{ 充分小时, } \left| \int_{\Gamma_\varepsilon} h(z) dz \right| \leq M\pi\varepsilon.$$

从而 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} h(z) dz = 0$. 于是在 (**) 式中令 $\varepsilon \rightarrow 0$,

$r \rightarrow \infty$ 得:

$$2 \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx - \pi = 0, \text{ 即 } \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

故由 (*) 式得: $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$

解法二: 考虑函数 $f(z) = \frac{\sin z}{z^2} e^{iz}$, 积分路径仍如图 5.2 所示, 由于 $f(z)$ 在所围的区域上解析, 故由柯西定理得:

$$\begin{aligned} & \int_{\epsilon}^r \frac{\sin x}{x^2} e^{ix} dx + \int_{\Gamma_r} \frac{\sin z}{z^2} e^{iz} dz + \\ & + \int_{-r}^{-\epsilon} \frac{\sin x}{x^2} e^{ix} dx + \int_{\Gamma_{\epsilon}} \frac{\sin z}{z^2} e^{iz} dz = 0. \quad (*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{又 } & \int_{\epsilon}^r \frac{\sin x}{x^2} e^{ix} dx + \int_{-r}^{-\epsilon} \frac{\sin x}{x^2} e^{ix} dx \\ & = 2i \int_{\epsilon}^r \frac{\sin x}{x^2} \cdot \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} dx \\ & = 2i \int_{\epsilon}^r \frac{\sin^2 x}{x^2} dx. \end{aligned}$$

类似于解法一, 有:

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_r} \frac{\sin z}{z^2} e^{iz} dz \\ & = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_r} \frac{e^{2iz} - 1}{z^2} dz = 0. \end{aligned}$$

再求当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, $\int_{\Gamma_{\epsilon}} \frac{\sin z}{z^2} e^{iz} dz$ 的极限:

$$\text{当 } z \neq 0 \text{ 时, } \frac{\sin z}{z^2} e^{iz} = \frac{1}{z^2} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \right.$$

$$+\frac{z^5}{5!}+\cdots)\left(1+iz+\frac{(iz)^2}{2!}+\cdots\right)=\frac{1}{z}+h(z),$$

其中 $h(z)$ 在 $z=0$ 解析, 故类似于解法一, 有:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\sin z}{z^2} e^{iz} dz = -\pi i.$$

于是在 (*) 式中令 $\varepsilon \rightarrow 0$, $r \rightarrow \infty$, 则得:

$$2i \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx - \pi i = 0, \quad \therefore \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$(11) \quad \int_0^\infty \frac{\cos x - e^{-x}}{x} dx.$$

解: 考虑 $f(z) = \frac{e^{iz} - e^{-z}}{z}$, $z=0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点,

从而适当补充 $f(0)$ 的定义后, $f(z)$ 在全平面解析. 选择如图 5.6 所示的积分围线, 则由柯西定理, 得:

$$\begin{aligned} & \int_0^r \frac{e^{ix} - e^{-x}}{x} dx + \int_{\Gamma_r} \frac{e^{iz} - e^{-z}}{z} dz + \\ & + \int_r^0 \frac{e^{-y} - e^{-iy}}{y} dy = 0. \quad (*) \end{aligned}$$

考虑 (*) 式中第一个和第三个积分之和:

$$\begin{aligned} & \int_0^r \frac{e^{ix} - e^{-x}}{x} dx + \\ & + \int_r^0 \frac{e^{-y} - e^{-iy}}{y} dy = \\ & = 2 \int_0^r \frac{\cos x - e^{-x}}{x} dx. \end{aligned}$$

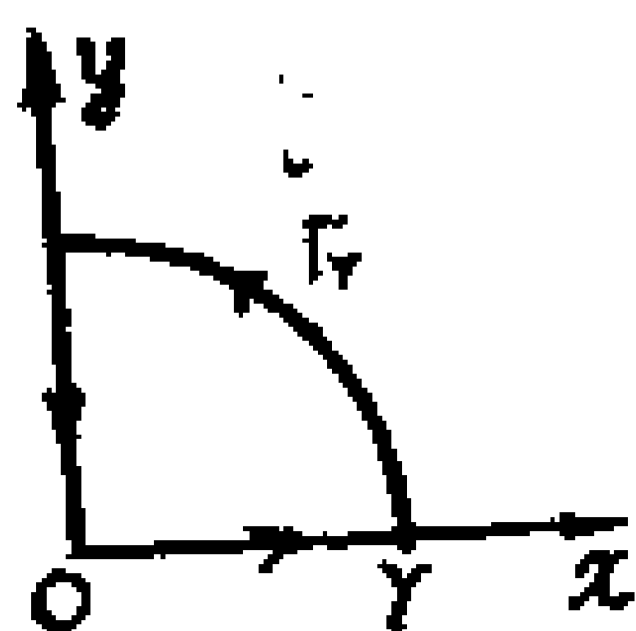


图 5.6

再估计第二个积分:

利用引理 3.1 即得 $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_1} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$

再作代换 $z_1 = iz$, 并利用引理 3.1, 得:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_1} \frac{e^{-z}}{z} dz = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_1'} \frac{e^{-z_1}}{z_1} dz_1 = 0,$$

其中 Γ_r 和 Γ_r' 关于虚轴对称。

于是在(*)式中令 $r \rightarrow \infty$, 则有 $\int_0^\infty \frac{\cos x - e^{-x}}{x} dx = 0.$

(12) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n}$, 其中整数 $n \geq 2$.

解. 当 $n \geq 2$ 时, 积分收敛。取积分围线如图 5.7 所示

($r > 1$). $f(z) = \frac{1}{1+z^n}$ 在扇形区域内有一阶极点 $e^{\frac{\pi i}{n}}$, 且

$$\text{Res}(f, e^{\frac{\pi i}{n}}) = \frac{1}{(1+z^n)'} \Big|_{z=e^{\frac{\pi i}{n}}} = -\frac{e^{\frac{\pi i}{n}}}{n}.$$

当 $\arg z = 0$ 时, $z = x (0 \leq x < \infty)$;

当 $\arg z = \frac{2\pi}{n}$ 时, 令 $|z| = x$,

则 $z = xe^{\frac{2\pi i}{n}} (0 \leq x < \infty)$. 由留数定理有:



图 5.7

$$\int_0^r \frac{dx}{1+x^n} + \int_{\Gamma_r} \frac{dz}{1+z^n} + \int_r^0 \frac{e^{\frac{2\pi i}{n}}}{1+x^n e^{\frac{2\pi i}{n}}} dx =$$

$$= 2\pi i \text{Res}(f, e^{\frac{\pi i}{n}}) = -\frac{2\pi i}{n} e^{\frac{\pi i}{n}}.$$

$$\begin{aligned} \text{由此有: } & \left(1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}\right) \int_0^r \frac{dx}{1+x^n} + \int_{\Gamma_r} \frac{dz}{1+z^n} = \\ & = -\frac{2\pi i}{n} e^{\frac{\pi i}{n}} \quad (*) \end{aligned}$$

$$\text{又 } \left| \int_{\Gamma_r} \frac{dz}{1+z^n} \right| \leq \frac{r^{\frac{2\pi}{n}}}{r^n - 1}, \text{ 而 } n \geq 2, \therefore \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_r} \frac{dz}{1+z^n} = 0.$$

故在 (*) 式中令 $r \rightarrow \infty$, 则有

$$\left(1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}\right) \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = -\frac{2\pi i}{n} e^{\frac{\pi i}{n}}.$$

$$\begin{aligned} \text{从而 } \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} &= \frac{-\frac{2\pi i}{n} e^{\frac{\pi i}{n}}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}} = \frac{\pi}{n} \cdot \frac{2i}{e^{\frac{\pi i}{n}} - e^{-\frac{\pi i}{n}}} \\ &= \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}}. \end{aligned}$$

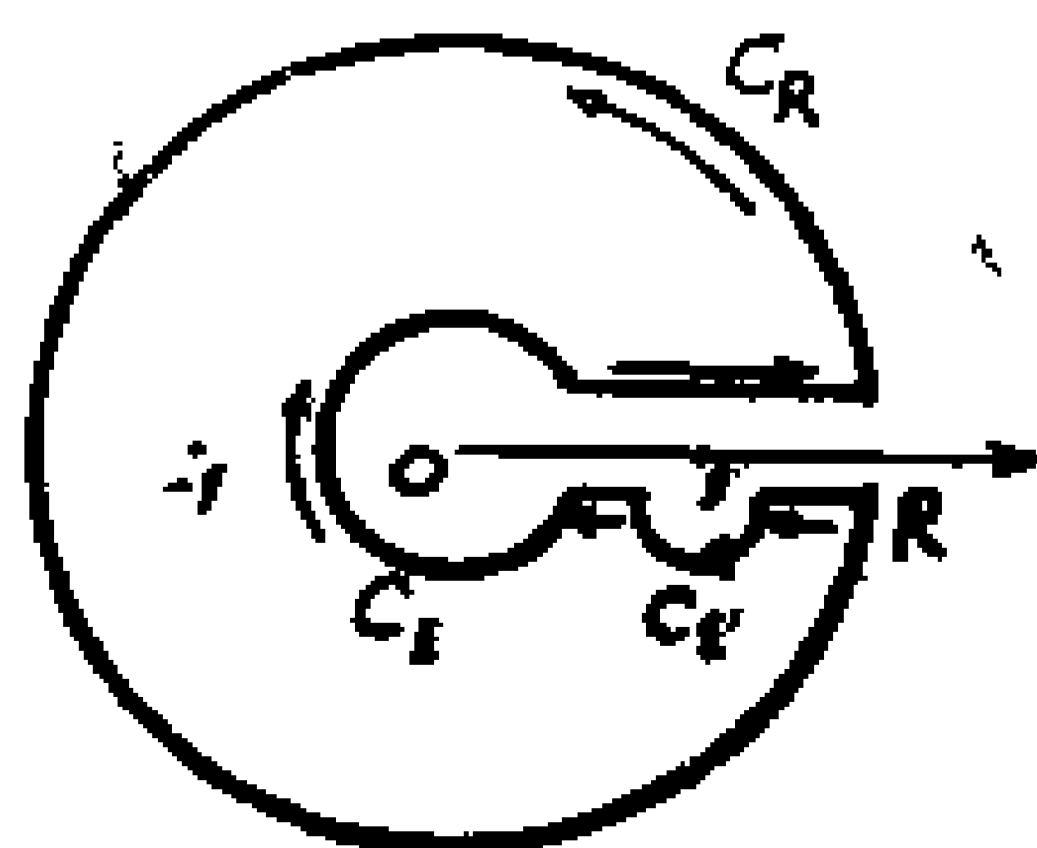
$$(13) \quad \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx.$$

解: 考虑多值函数 $\frac{(\operatorname{Ln} z)^2}{z^2 - 1}$, 取正实轴作割线, 用

$f(z) = \frac{(\ln z)^2}{z^2 - 1}$ 表示在割线上沿取实值 (即在正实轴上

沿 $\arg z = 0$) 的那个分枝, 选取积分围线 $C(R, \bullet)$,

如图5.8所示, $f(z)$ 在 $C(R, \epsilon, \epsilon')$ ($0 < \epsilon, \epsilon' < \frac{1}{2}$; $R > 1$) 的内区域内有极点 $z = -1$, 且 $\text{Res}(f, -1) = \lim_{z \rightarrow -1} [(z+1)f(z)] = \frac{\pi^2}{2}$, 在割线



上沿 $x = 1$ 是 $f(z)$ 的可去奇点, 此外 $f(z)$ 再无其它奇点。根据留数定理, 得: 图5.8

$$\begin{aligned} & \int_{\epsilon}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz + \int_R^{1+\epsilon'} f(x) dx + \\ & + \int_{C_{\epsilon'}'} f(z) dz + \int_{1+\epsilon'}^{\epsilon} f(x) dx + \int_{C_{\epsilon}} f(z) dz = \\ & = 2\pi i \text{Res}(f, -1) = \pi^3 i \quad (*) \end{aligned}$$

又当 $z \in C_{\epsilon'}$ 时, 因为在正实轴下沿 $\arg z = 2\pi$, $\ln z = 2\pi i + \lambda(\epsilon')$, 其中 $\lambda(\epsilon') \rightarrow 0$, 当 $\epsilon' \rightarrow 0$ 时。于是, 注意到在 $C_{\epsilon'}$ 上, $z = \epsilon' e^{i\theta} + 1$, 故有

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \int_{C_{\epsilon'}'} f(z) dz &= \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \int_{C_{\epsilon'}'} \frac{(\ln z)^2}{(z-1)(z+1)} dz \\ &= \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \int_{2\pi}^{\pi} \frac{[2\pi i + \lambda(\epsilon')]^2 i}{2 + \epsilon' e^{i\theta}} d\theta = 2\pi^3 i, \end{aligned}$$

故由 (*) 式得:

$$\begin{aligned} & \int_{\epsilon}^R \frac{\ln^2 x}{x^2 - 1} dx - \int_{\epsilon}^R \frac{(\ln x + 2\pi i)^2}{x^2 - 1} dx + 2\pi^3 i + \\ & + \left(\int_{C_R} + \int_{C_{\epsilon}} \right) f(z) dz = \pi^3 i \quad (**). \end{aligned}$$

又易知: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} f(z) dz = 0$, $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0$.

故在 (**) 式中, 令 $\varepsilon \rightarrow 0$, $R \rightarrow +\infty$, 得:

$$2\pi^3 i - 4\pi i \int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2 - 1} dx = \pi^3 i.$$

因此 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2 - 1} dx = \frac{\pi^2}{4}$.

$$(14) \quad \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}}.$$

解: 考虑多值函数 $g(z) = \sqrt[3]{(1-z)(1+z)^2}$, 显然它有枝点 $z=1$ 和 $z=-1$, 而 $z=\infty$ 不是枝点, 故在复平面上取线段 $[-1, 1]$ 为割线, 得一区域. 在此区域内, 可以把 $g(z)$ 分成解析分枝. 取在割线的上沿为正值那一枝, 此时规定在割线上沿取 $\arg(1+x)=0$, $\arg(1-x)=0$.

作闭围线如图 5.9 所示, 其中 Γ_ε 和 $\Gamma_{\varepsilon'}$ 分别是以 -1 和 1 为圆心, ε 为半径的圆, Γ_r 是以 0 为圆心, r 为半径的圆, 在这里 $0 < \varepsilon < 1$, $r > 2$.

如图 5.9, 当 z 从上沿沿 $\Gamma_{\varepsilon'}$ 按顺时针方向转到下沿时, $\arg(1-z)$ 减少 2π , $\arg(1+z)$ 不变. 因此 $g(z)$ 的幅角增加

$-\frac{2\pi}{3}$, 故在割线的下沿:

$$g(x) = e^{-\frac{2\pi}{3}i} \sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}.$$

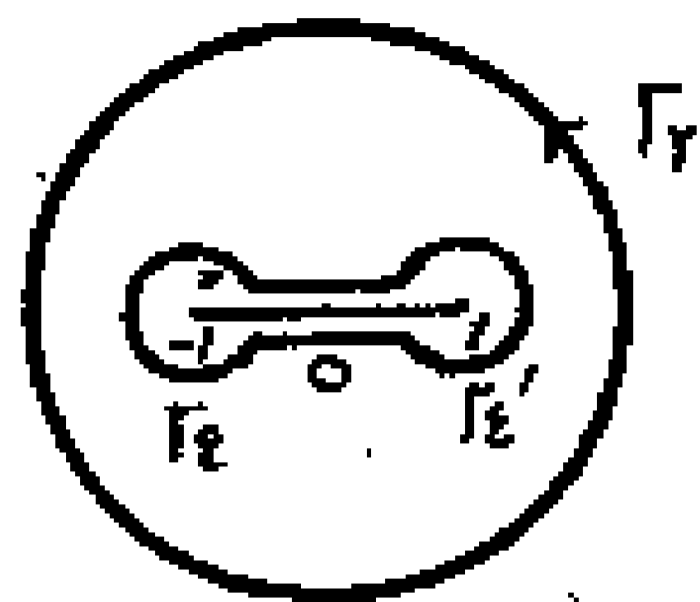


图 5.9

根据柯西定理, 得

$$\begin{aligned} & \left(1 - e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) \int_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}} + \left(\Gamma_{\epsilon'} + \right. \\ & \left. + \int_{\Gamma_{\epsilon}} + \int_{\Gamma_{\epsilon'}}\right) \frac{dz}{g(z)} = 0. \end{aligned} \quad (*)$$

其中沿 Γ_{ϵ} 及沿 $\Gamma_{\epsilon'}$ 的积分是按顺时针方向取的。沿 $\Gamma_{\epsilon'}$ 的积分是按反时针方向取的。

$$\text{又 } \left| \int_{\Gamma_{\epsilon'}} \frac{dz}{g(z)} \right| \leq 2\pi\epsilon^{\frac{2}{3}}, \quad \left| \int_{\Gamma_{\epsilon}} \frac{dz}{g(z)} \right| \leq 2\pi\epsilon^{\frac{1}{3}}.$$

所以当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 上述两个积分都趋于零。故在 $(*)$ 式中, 令 $\epsilon \rightarrow 0$, 得:

$$\left(1 - e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}} = \int_{\Gamma_{\epsilon}} \frac{dz}{g(z)} \quad (**)$$

现在计算 $\int_{\Gamma_{\epsilon}} \frac{dz}{g(z)}$ 。

由于 $z = \infty$ 是 $\frac{1}{g(z)}$ 的一阶零点, 故其留数为

$-\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{g(z)}$ 。于是显然有:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{\epsilon}} \frac{1}{g(z)} dz &= 2\pi i \operatorname{Res}\left\{\frac{1}{g(z)}, \infty\right\} \\ &= 2\pi i \left[-\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{g(z)}\right] = -2\pi i \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{g(x)}. \end{aligned}$$

现在来求 $g(x)$ 在正实轴上 $x > 1$ 处的表达式, 由于在割线 $[-1, 1]$ 的上沿, $\arg(1-x) = \arg(1+x) = 0$, 故在 $x > 1$

处, $\arg(1-x) = -\pi$, $\arg(1+x) = 0$, 从而

$$g(x) = \sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2} e^{i \frac{-\arg(1-x) + 2\arg(1+x)}{3}} \\ = \sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2} e^{-\frac{\pi i}{3}}.$$

$$\therefore \int_{\Gamma} \frac{1}{g(z)} dz = -2\pi i \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{g(x)} = -2\pi i e^{\frac{\pi i}{3}}$$

于是由 (**) 式得:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}} = \frac{-2\pi i e^{\frac{\pi i}{3}}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{3}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

$$(15) \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x-2)\sqrt{1-x^2}}.$$

解: 考虑多值函数 $g(z) = (z-2)\sqrt{1-z^2}$. 在复平面上取线段 $[-1, 1]$ 作为割线, 得一区域. 在此区域内, 可以把 $g(z)$ 分成解析分枝. 取在割线上沿 $\sqrt{1-x^2}$ 为正值的那枝, 可规定 $\arg(1-x) = 0$, $\arg(1+x) = 0$.

取积分围线如图 5.9 所示. 当 z 从上沿沿 Γ_1 按顺时针方向转到下沿时, $\arg(1-z)$ 减少 2π , $\arg(1+z)$ 不变, 因此 $g(z)$ 的幅角增加 $-\pi$, 故在割线的下沿

$$g(z) = (x-2)\sqrt{1-x^2} e^{-\pi i} = -(x-2)\sqrt{1-x^2}.$$

根据留数定理, 得:

$$\int_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} \frac{dx}{(x-2)\sqrt{1-x^2}} + \int_{1-\epsilon}^{-1+\epsilon} \frac{dx}{(x-2)\sqrt{1-x^2}} +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\int_{\Gamma_\epsilon} + \int_{\Gamma_{\epsilon'}} + \int_{\Gamma_r} \right) - \frac{dz}{g(z)} \\
& = 2\pi i \operatorname{Res} \left\{ -\frac{1}{g(z)}, 2 \right\}. \quad (*)
\end{aligned}$$

$$\text{而} \quad \operatorname{Res} \left\{ -\frac{1}{g(z)}, 2 \right\} = \lim_{z \rightarrow 2} -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}e^{-\frac{\pi i}{2}}} = \sqrt{\frac{i}{3}}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} \frac{dx}{(x-2)\sqrt{1-x^2}} + \int_{1-\epsilon}^{-1+\epsilon} \frac{dx}{(x-2)\sqrt{1-x^2}} \\
& = 2 \int_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} \frac{dx}{(x-2)\sqrt{1-x^2}}.
\end{aligned}$$

因此，在 (*) 式中，令 $\epsilon \rightarrow 0$ ，得：

$$2 \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x-2)\sqrt{1-x^2}} = 2\pi i \left(\sqrt{\frac{i}{3}} \right),$$

$$\text{即} \quad \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x-2)\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

$$(16) \quad \int_C \frac{dz}{\sqrt{1+z+z^2}}, \quad \text{其中被积函数是有关多值函数}$$

数的任一解析分枝，并且积分是沿圆 $|z|=2$ 按反时针方向取的。

解：令 $f(z) = (1+z+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ ，在 $|z|<2$ 内， $f(z)$ 有两个枝点 $z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 。作割线连结这两枝点，如图 5.10

在割线的外部可以取解析分枝，在 $x>2$ 时，若取 $\arg(1+z+z^2)=0$ 的那一解析分枝，则有

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1+x+\frac{1}{x^2}} e^{i \frac{\arg(1+x+\frac{1}{x^2})}{2}}} = -1.$$

$$\therefore \int_C f(z) dz = 2\pi i.$$

在 $x > 2$ 时, 若取 $\arg(1+x+x^2) = 2\pi$

的那一解析分枝, 则依同样方法, 有

$$\int_C f(z) dz = -2\pi i.$$

9. 试由 $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

证明:

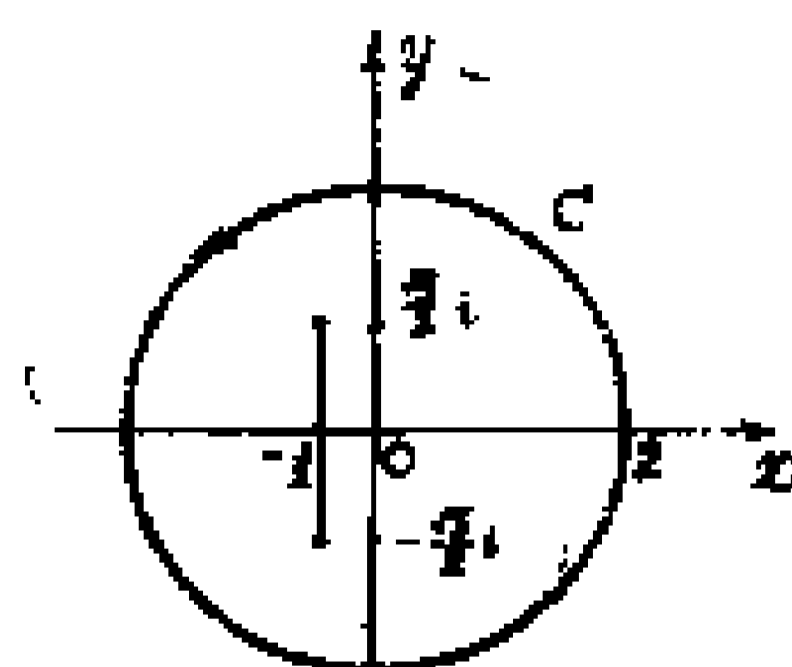


图5.10

$$(1) \int_0^\infty \cos r^2 dr = \int_0^\infty \sin r^2 dr = \frac{\sqrt{2\pi}}{4},$$

$$(2) \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2hx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-h^2}, \text{ 其中 } h > 0.$$

证: 考虑 e^{-z^2} , 取积分围线如图5.11所示, 由柯西定理得:

$$\left(\int_{OA} + \int_{\Gamma_R} + \int_{BA} \right) e^{-z^2} d\bar{z} = 0 \quad (*)$$

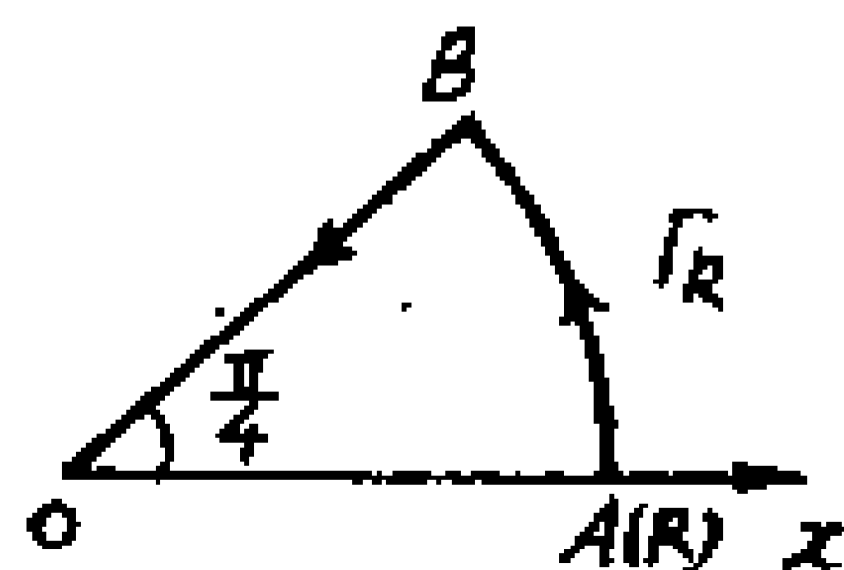


图5.11

$$\text{已知 } \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-x^2} dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

$$\text{其次令 } z = Re^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4},$$

$$\text{则 } \int_{\Gamma_R} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2} (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) i e^{i\theta} d\theta$$

$$\therefore \left| \int_R \right| \leq \int_0^\pi e^{-R^2 \cos 2\theta} d\theta.$$

作变换 $2\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$, 则

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^{-R^2 \cos 2\theta} d\theta &= - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 e^{-R^2 \sin \varphi} d\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2 \sin \varphi} d\varphi \leq \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R^2}{\pi} \varphi} d\varphi \\ &= \frac{\pi}{4R^2} (1 - e^{-R^2}). \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} e^{-z^2} dz = 0.$$

最后, 设 z 在 BO 上变动, 令 $|z| = r$, 则

$$z = r \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1+i}{\sqrt{2}} r, \quad z^2 = ir^2,$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{BO} &= \int_R^0 e^{-ir^2} \frac{1+i}{\sqrt{2}} dr \\ &= -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^R (\cos r^2 - i \sin r^2) dr. \end{aligned}$$

故在 (*) 式中, 令 $R \rightarrow \infty$, 则有

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \left[\int_0^\infty \cos r^2 dr - i \int_0^\infty \sin r^2 dr \right] = 0$$

$$\text{即 } \int_0^\infty \cos r^2 dr - i \int_0^\infty \sin r^2 dr = \frac{\sqrt{2}\pi}{4} (1-i).$$

比较两端的实部和虚部, 得:

$$\int_0^{\infty} \cos r^2 dr = \int_0^{\infty} \sin r^2 dr = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

(2) 考虑 $f(z) = e^{-z^2}$, 取如图 5.12 所示的矩形的边界作为积分围线, 根据柯西定理, 得:

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R e^{-x^2} dx + \int_R^{-R} e^{-(x+hi)^2} dx + \\ + \left(\int_{s_1} + \int_{s_2} \right) e^{-z^2} dz = 0. \end{aligned} \quad (*)$$

$$\text{又 } \int_{-R}^R e^{-x^2} dx = 2 \int_0^R e^{-x^2} dx,$$

故令 $R \rightarrow \infty$, 并利用

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

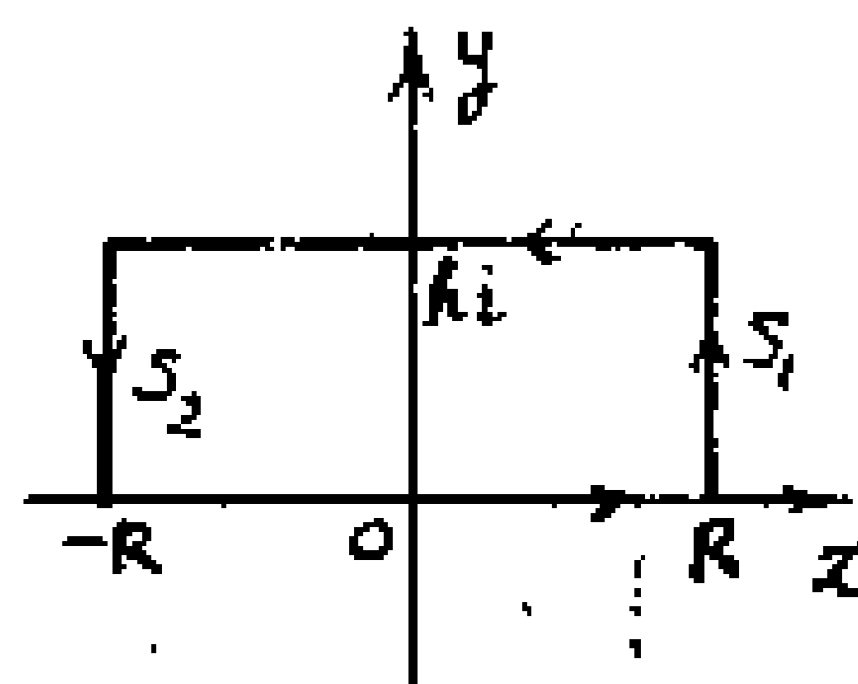


图5.12

$$\text{得: } \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

$$\text{其次 } \int_R^{-R} e^{-(z+hi)^2} dz = - \int_{-R}^R e^{-(x+ih)^2} dx.$$

$$= -e^{h^2} \int_{-R}^R e^{-x^2} e^{-2hix} dx.$$

$$\text{故 } \lim_{R \rightarrow \infty} \int_R^{-R} e^{-z^2} dz = -e^{h^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-2hix} dx.$$

另外在线段 s_1 和 s_2 上, $z = \pm R + iy$ ($0 \leq y \leq h$).

$$|e^{-z^2}| = e^{-(R^2 - y^2)} \leq e^{h^2} e^{-R^2} \text{ (将 } y \text{ 换为它的最大值 } h \text{)}.$$

$$\text{故 } \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_1} e^{-z^2} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_2} e^{-z^2} dz = 0.$$

从而在 (*) 式中令 $R \rightarrow \infty$, 则有

$$\sqrt{\pi} - e^{h^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-2hix} dx = 0.$$

$$\text{比较实部, 得 } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos 2hx dx = \sqrt{\pi} e^{-h^2}.$$

$$\text{于是得 } \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2hx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-h^2}.$$

10. 试证: 在定理5.1的条件下, 如果 $\varphi(z)$ 在闭区域 D 上解析, 并且 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 及 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 分别是 $f(z)$ 在 D 内的零点和极点, 而其阶数分别是 k_1, k_2, \dots, k_m 及 l_1, l_2, \dots, l_n , 那么:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{p=1}^m k_p \varphi(\alpha_p) - \sum_{q=1}^n l_q \varphi(\beta_q).$$

证: 由于 α_p 为 $f(z)$ 的 k_p 阶零点, 故 $f(z)$ 在 α_p 的邻域内可写成

$$f(z) = (z - \alpha_p)^{k_p} \cdot g(z), \quad (g(\alpha_p) \neq 0, g(z) \text{ 解析}).$$

$$\text{从而 } \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} = \varphi(z) \left[\frac{k_p}{z - \alpha_p} + \frac{g'(z)}{g(z)} \right], \text{ 其中}$$

$$g(\alpha_p) \neq 0, \quad \frac{g'(z)}{g(z)} \text{ 在 } \alpha_p \text{ 的邻域内解析. 故点 } \alpha_p \text{ 是函数}$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} \text{ 的一阶极点, 显然 } \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} \text{ 在 } \alpha_p \text{ 的留数等于 } k_p \varphi(\alpha_p).$$

其次, 由于 β_q 为 $f(z)$ 的 l_q 阶极点, 故在 β_q 的邻域内, 有:

$$f(z) = \frac{\Psi(z)}{(z - \beta_q)^{l_q}} \quad (\Psi(\beta_q) \neq 0, \Psi(z) \text{ 解析}),$$

从而 $\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \varphi(z) \left[-\frac{l_q}{z - \beta_q} + \frac{\Psi'(z)}{\Psi(z)} \right]$, 其中

$\Psi(\beta_q) \neq 0$, $\frac{\Psi'(z)}{\Psi(z)}$ 在 β_q 的邻域内解析, 故点 β_q 是函数

$\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ 的一阶极点, 显然留数等于 $-l_q \varphi(\beta_q)$. 于是

根据留数定理, 得:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\ &= \sum_{p=1}^n k_p \varphi(a_p) - \sum_{q=1}^n l_q \sum l_q \varphi(\beta_q). \end{aligned}$$

11. 应用儒歇定理, 求下列方程在 $|z| < 1$ 内根的个数:

(1) $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$;

(2) $z^4 - 5z + 1 = 0$;

(3) $z = \varphi(z)$, 在这里 $\varphi(z)$ 在 $|z| \leq 1$ 上解析, 并且 $|\varphi(z)| < 1$.

解 (1) 令 $f(z) = z^8 - 4z^5$, $g(z) = z^2 - 1$, 在 $|z| = 1$ 上, $|f(z)| \geq |4z^5| - |z^8| = 3$, $|g(z)| \leq 2$, 故所给方程在 $|z| < 1$ 内根的个数与方程 $f(z) = 0$ 在 $|z| < 1$ 内根的个数相同。而 $z^8 - 4z^5 = z^5(z^3 - 4) = 0$ 在 $|z| < 1$ 内有五个根。

($z = 0$ 是五重根), 故原方程在 $|z| < 1$ 内有五个根。

(2) 令 $f(z) = -5z$, $g(z) = z^4 - 1$, 在 $|z| = 1$ 上,

$|f(z)| = 5$, $|g(z)| \leq 2$, 故所给方程在 $|z| < 1$ 内根的个数与 $f(z) = 0$ 在 $|z| < 1$ 内根的个数相同. 而 $f(z) = 0$ 在 $|z| < 1$ 内只有一个根, 故原方程在 $|z| < 1$ 内有一个根.

(3) 令 $f(z) = z$, 则在 $|z| = 1$ 上, $|f(z)| = 1$, 而 $|\varphi(z)| < 1$, 故方程 $z = \varphi(z)$ 与方程 $f(z) = 0$ 在 $|z| < 1$ 内有相同个数的根. 从而 $z = \varphi(z)$ 在 $|z| < 1$ 内有一个根.

12. 试用儒歇定理证明代数基本定理: 每一个 n 次多项式都有 n 个零点.

证: 设多项式为

$$F(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n, \quad n > 0,$$

$a_n \neq 0$, 及 $f(z) = a_n z^n$.

$$g(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}.$$

首先, $f(z)$ 有 n 个零点, 以原点为心, $R > 1$ 为半径的圆, 作为儒歇定理中的闭围线 c , 则在 c 上:

$$|f(z)| = |a_n| R^n.$$

$$|g(z)| \leq |a_0| + |a_1| R + \cdots + |a_{n-1}| R^{n-1}$$

$$< (|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|) R^{n-1},$$

取 R , 使 $R > \frac{|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|}{|a_n|}$, 则在 c 上有

$|g(z)| < |f(z)|$. 所以由儒歇定理, 知 $F(z) = f(z) + g(z)$ 有 n 个零点.

第六章 保形映照

1. 如果单叶解析函数 $w = f(z)$ 把 z 平面上可求面积的区域 D 映照成 w 平面上的区域 D^* , 证明 D^* 的面积是

$$A = \iint_D |f'(z)|^2 dx dy.$$

证: $\because f(z)$ 是单叶解析函数, $\therefore f'(z) \neq 0$,
从而 $|f'(z)| \neq 0$ ($z \in \bar{D}$), $C-R$ 条件, 得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial u}{\partial y} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = |f'(z)|^2 \neq 0 \end{aligned}$$

于是按二重积分的变量替换公式, 可得 D^* 的面积

$$A = \iint_{D^*} du dv = \iint_D \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} dx dy = \iint_D |f'(z)|^2 dx dy.$$

2. 如果函数 $f(z)$ 在可求面积的区域 D 内单叶解析, 并且满足条件 $|f(z)| \leq 1$, 证明: $\iint_D |f'(z)|^2 dx dy \leq \pi$.

证: 设 $w = f(z)$ 将 z 平面上区域 D 映照成 w 平面上的区域 D^* , 由于 $|w| \leq 1$, 故 D^* 的面积 $A \leq \pi$, 因此由上题知:

$$\iint_D |f'(z)|^2 dx dy \leq \pi.$$

3. 如果函数 $f(z)$ 在 $z=0$ 解析, 并且, $f'(0) \neq 0$, 证明 $f(z)$ 在 $z=0$ 的一个邻域内单叶.

证法一: 不妨假定 $f(0) = 0$ (如 $f(0) = a$, 而 $a \neq 0$, 可令 $F(z) = f(z) - a$, 于是 $F(z)$ 满足题中所设条件, 且 $F(z)$ 和 $f(z)$ 同时具备或同时不具备单叶性). 因 $f'(0) \neq 0$, 故 $z=0$ 是 $f(z)$ 的一阶零点, 由零点的孤立性, 必可找到一个以 $z=0$ 为心以 ρ 为半径的圆 C , 其内区域为 G , 使得在圆 C 上 $f(z) \neq 0$, 在闭区域 \bar{G} 上 $f(z)$ 解析, 在 G 内 $f(z)$ 除 $z=0$ 外无其它零点. 用 m 表示 $|f(z)|$ 在 C 上的下确界, 显然 $m > 0$.

因 $f(z)$ 在 $z=0$ 连续, 且 $f(0) = 0$, 故存在 ρ' , 使当 $|z| < \rho'$ 时, 有 $|f(z)| < m$, 选取 $\rho'' < \min(\rho, \rho')$, 则在 $D: |z| \leq \rho''$ 上, $|f(z)| < m$.

我们来证明 $w = f(z)$ 在 D 内单叶, 令 $D_1 = f(D)$, 任取 $w_1 \in D_1$, 必有 $w_1 = f(z_1)$, $z_1 \in D$, $|w_1| < m$. 则在圆 C 上, $|f(z)| \geq m > |w_1|$, 而 $f(z) - w_1$ 和 $f(z)$ 都在闭区域 \bar{G} 上解析, 故由儒歇定理, 在 G 内 $f(z) - w_1$ 和 $f(z)$ 的零点个数相同. 因而 $f(z) - w_1$ 在 D 内只有一个零点 z_1 , 也就是说, 对于每一个 $w_1 \in D_1$ 有唯一的 $z_1 \in D$ 与其对应, 所以 $w = f(z)$ 在 $D: |z| \leq \rho''$ 内单叶.

证法二: $\because f(z)$ 在 $z=0$ 解析, 且不妨假设 $f(0) = 0$,

$$\therefore \text{在 } |z| < r \text{ 内有 } f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n,$$

且 $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ 在 $|z| < r$ 内绝对收敛, 因此当 $0 < \rho < r$

时, $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|\rho^{n-1} = |a_1| + \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|\rho^{n-1}$ 收敛。

又 $\because f'(0) \neq 0, \therefore a_1 \neq 0$, 于是存在充分小的 $\rho_0 > 0$,

使得 $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|\rho_0^{n-1} < |a_1|$ 。

从而对于在 $|z| < \rho_0$ 内任意两个不同的点 z_1 和 z_2 , 均有

$$\begin{aligned} |f(z_1) - f(z_2)| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_1^n - z_2^n) \right| \\ &= |z_1 - z_2| \left| a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z_1^{n-1} + z_1^{n-2} z_2 + \cdots + z_1^{n-1}) \right| \\ &\geq |z_1 - z_2| \left[|a_1| - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n \rho_0^{n-1} \right] > 0, \end{aligned}$$

即 $f(z_1) \neq f(z_2)$, 故 $f(z)$ 在 $z=0$ 的一个邻域 $|z| < \rho_0$ 内单叶。

4. 如果 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 不为常数, 且没有零点, 证明 $|f(z)|$ 不可能在 D 内达到最小值。

证: 由于 $f(z)$ 在 D 内解析, 且无零点, 故 $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ 在区域 D 内解析, 假定 $|f(z)|$ 在区域 D 内达到最小值, 则 $|g(z)| = \frac{1}{|f(z)|}$ 在区域 D 内必达到最大值, 因此由最大模原理, $g(z)$ 在 D 内恒为常数, 从而 $f(z) = \frac{1}{g(z)}$ 在 D 内也恒为常数, 这与已知条件矛盾, 因此 $|f(z)|$ 在 D 内不可能达到最小值。

5. 设 $f(z)$ 在 $|z| \leq a$ 上解析, 在圆 $|z| = a$ 上有 $|f(z)| > m$, 并且 $|f(0)| < m$, 其中 a 及 m 都是有限正数, 证明 $f(z)$ 在 $|z| < a$ 内至少有一零点。

证: 反证法, 假定 $f(z)$ 在 $|z| < a$ 内无零点, 由于 $f(z)$ 在 $|z| \leq a$ 上解析, 故 $|f(z)|$ 在其上连续, 从而 $|f(z)|$ 在其上可达到最小值, 又由于在 $|z| = a$ 上 $|f(z)| > m$, 而 $|f(0)| < m$, 故 $f(z)$ 不为常数且 $|f(z)|$ 在 $|z| < a$ 内达到最小值, 但这与 4 题结果矛盾, 因此 $f(z)$ 在 $|z| < a$ 内至少有一个零点。

6. 设在 $|z| < 1$ 内, $f(z)$ 解析, 并且 $|f(z)| < 1$, 但 $f(\alpha) = 0$, 其中 $|\alpha| < 1$. 证明: 在 $|z| < 1$ 内, 有不等式

$$|f(z)| \leq \left| \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \right|.$$

证: 考虑函数 $w = \varphi(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$, 它在 $|z| < 1$ 内解析,

把 $|z| < 1$ 保形映照为 $|w| < 1$, 且 $\varphi(\alpha) = 0$, 其反函数 $z = \varphi^{-1}(w)$ 在 $|w| < 1$ 内解析, 把 $|w| < 1$ 映照成 $|z| < 1$, 且有 $\varphi^{-1}(0) = \alpha$, 考虑 $|w| < 1$ 内的复合函数 $F(w) \equiv f[\varphi^{-1}(w)]$, 它是解析的, 并且, $F(0) \equiv f[\varphi^{-1}(0)] = f(\alpha) = 0$, 当 $|w| < 1$ 时, $|F(w)| = |f[\varphi^{-1}(w)]| = |f(z)| < 1$, 由希瓦尔兹引理, 可知 $|F(w)| \leq |w|$, 从而 $|f(z)| \leq \left| \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \right|$

7. 应用希瓦尔兹引理, 证明: 把 $|z| < 1$ 变为 $|w| < 1$, 且把 α 变为 0 的双方单值保形映照一定有下列形状

$$w = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z},$$

这里 θ 是实常数, α 是满足 $|\alpha| < 1$ 的复常数。

证: 设所求的满足条件的映照为 $f(z)$ 作映照

$$w = \varphi(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \alpha z}. \text{ 由书中 } P. 147(2) \text{ 可知, 它将 } |z| < 1 \text{ 双}$$

方单值保形映照为 $|w| < 1$. 且 $\varphi(\alpha) = 0$, 因此它的逆映照 $z = \varphi^{-1}(w)$ 将 $|w| < 1$ 双方单值保形映照为 $|z| < 1$, 且 $\varphi^{-1}(0) = \alpha$.

作 $\xi = F(w) = f[\varphi^{-1}(w)]$, 它将 $|w| < 1$ 双方单值保形地映照成 $|\xi| < 1$, 且 $F(0) = 0$; 故由希瓦尔兹引理可知, 当 $|w| < 1$ 时, 有:

$$|F(w)| \leq |w| \quad (1)$$

又 $w = F^{-1}(\xi)$ 将 $|\xi| < 1$ 双方单值保形地映照为 $|w| < 1$, 且 $F^{-1}(0) = 0$, 故由希瓦尔兹引理可知, 当 $|\xi| < 1$ 时, 有 $|F^{-1}(\xi)| \leq |\xi|$, 于是, 相应地, 当 $|w| < 1$ 时, 有

$$|w| \leq |F(w)| \quad (2)$$

由 (1) 和 (2) 得: 当 $|w| < 1$ 时, $|F(w)| = |w|$. 从而由希瓦尔兹引理得 $F(w) = e^{i\theta}w$, 换为变量 z , 即得

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \alpha z} \text{ 它就是所求的映照.}$$

8. 试作保形映照:

(1) 把带形区域 $\pi < y < 2\pi$ 映照成上半平面;

(2) 把去掉上半虚轴的复平面映照成上半平面.

解: (1)

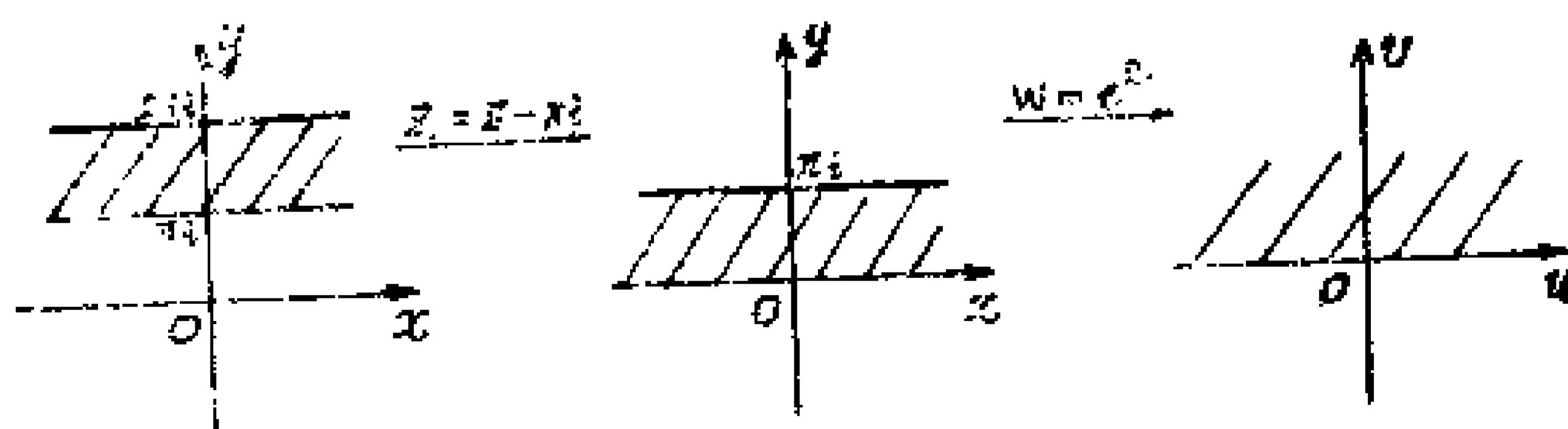


图 6.1

故 $w = e^{-1} = e^{-\pi i} = -e^{\pi}$ 即为所求。

(2) 下图中 z_1 改成 $z_1 = e^{-\frac{\pi}{2}i}$ $z, \frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{5\pi}{2} + 2\pi$

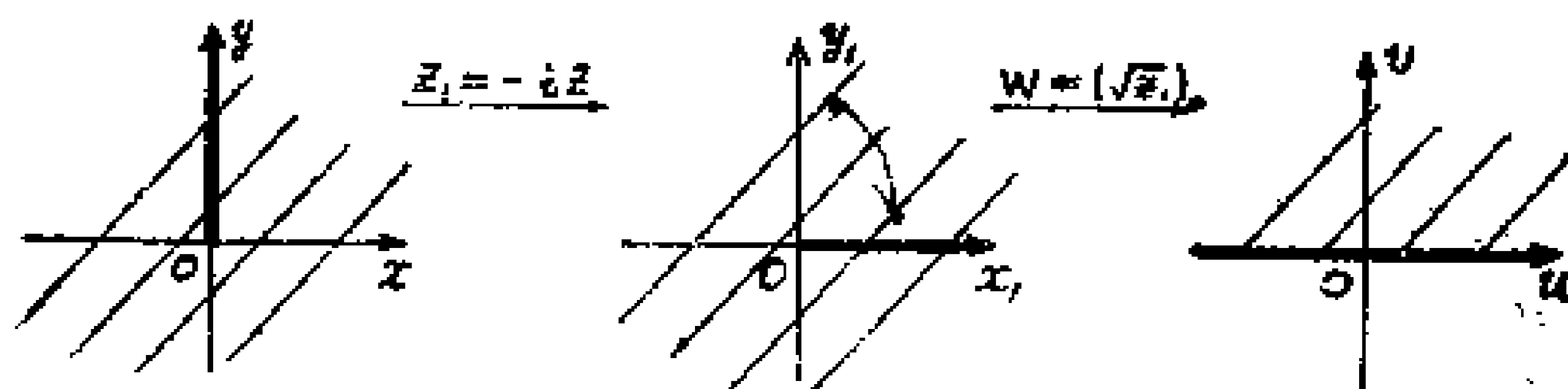


图 6.2

故 $w = e^{-\frac{\pi}{4}i} (\sqrt{z})_0$ 即为所求，其中 $(\sqrt{z})_0$

取当 $z=1$ 时 $(\sqrt{1})_0 = 1$ 的那一枝。

9. 函数 $w = z^2$ 及 $z = \sqrt{w}$ 分别把 $x = c_1, y = c_2$ 及 $u = c_3, v = c_4$ 映照成 z 平面及 w 平面上的什么曲线？这里 u 及 v 是 w 的实部及虚部， c_1, c_2, c_3 及 c_4 是实常数。

解： $w = u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

$$\therefore u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

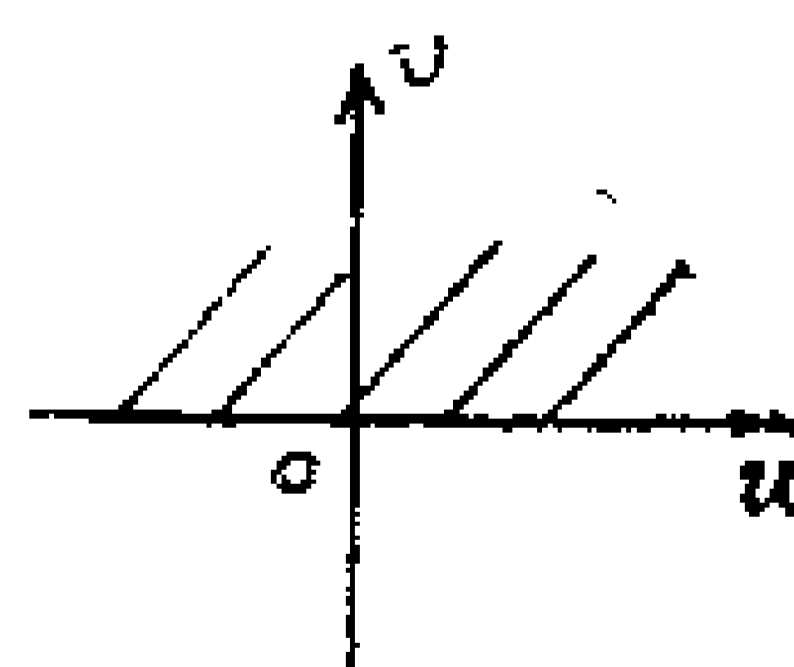
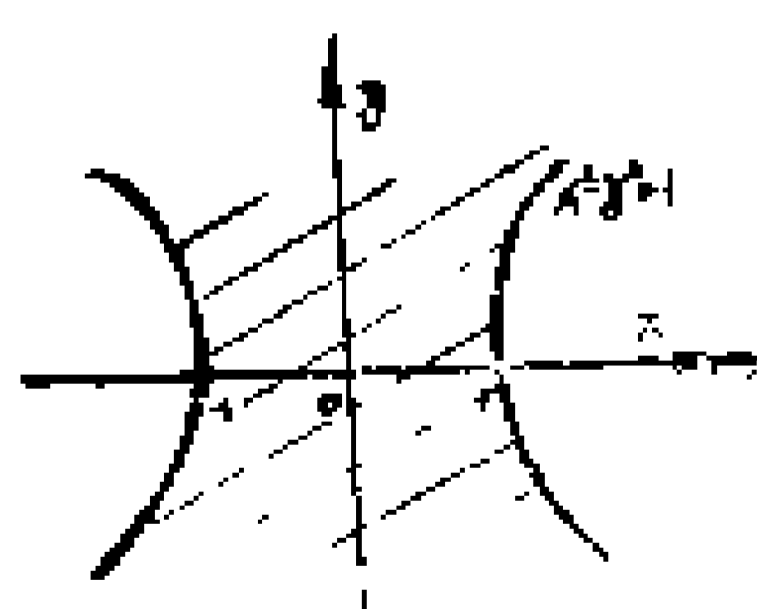
从而

$$x = c_1 \xrightarrow{w = z^2} \begin{cases} v^2 = 4c_1^2(u - c_1^2), & c_1 \neq 0; \\ u \leq 0, \quad v = 0, & c_1 = 0. \end{cases}$$

$$y = c_2 \xrightarrow{w = z^2} \begin{cases} v^2 = 4c_2^2 (u + c_2^2), & c_2 \neq 0; \\ u \geq 0, \quad v = 0, & c_2 = 0. \end{cases}$$

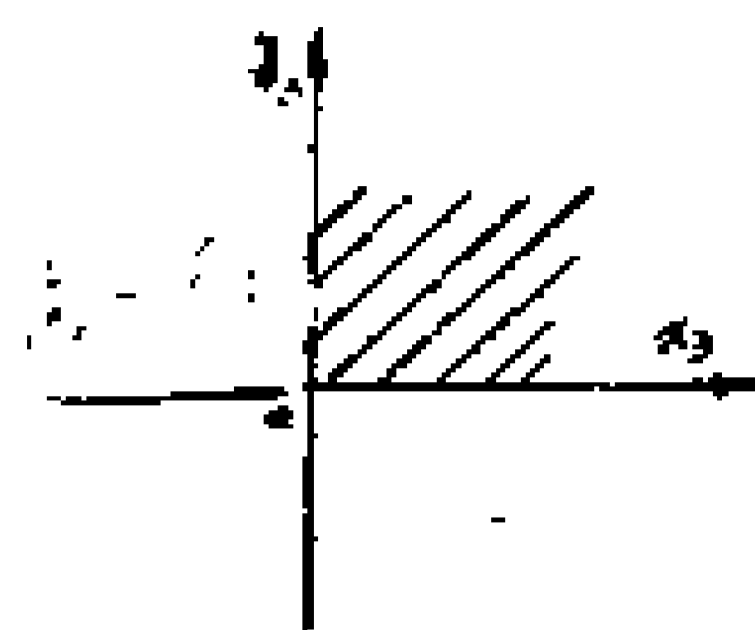
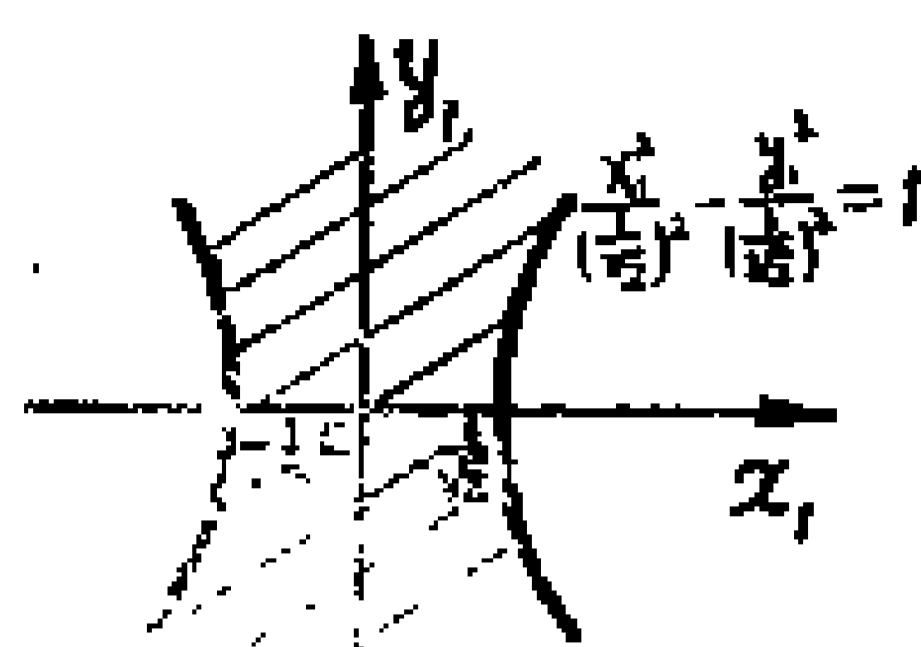
$$u = c_3 \xrightarrow{z = \sqrt{w}} \begin{cases} x^2 - y^2 = c_3, & c_3 \neq 0; \\ x^2 - y^2 = 0, & c_3 = 0. \end{cases}$$

$$u = c_4 \xrightarrow{z = \sqrt{w}} \begin{cases} 2xy = c_4, & c_4 \neq 0; \\ xy = 0, & c_4 = 0. \end{cases}$$



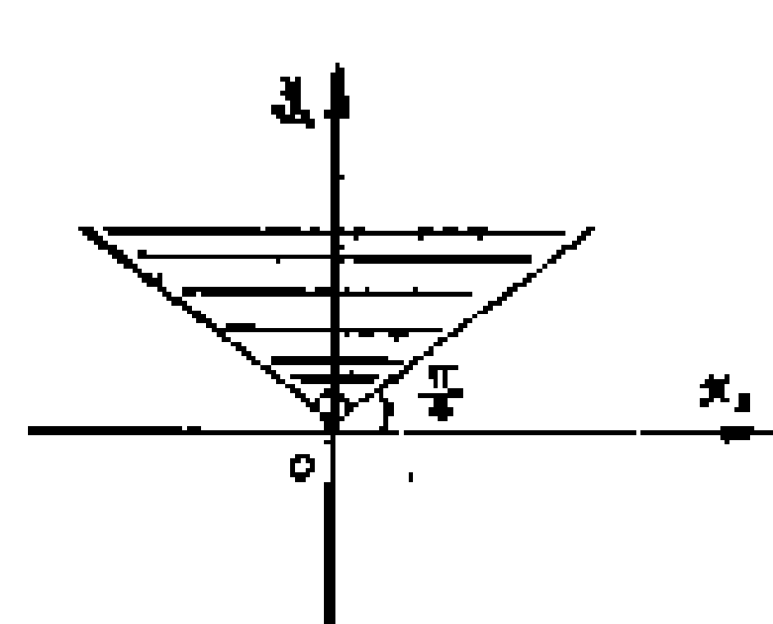
$$Z_1 = \frac{z}{\sqrt{2}} \downarrow$$

$$W = z^{\frac{2}{3}} \uparrow$$



$$z_2 = z_1 + \sqrt{z_1^2 - 1}$$

取 $z_1 = 0$ 时 $z_2 = -i$ 那一枝



$$z_3 = e^{-\frac{\pi}{4}i} z_2$$

图 6.3

10. 试作保形映照:

(1) 把双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 两枝之间的区域映照成上半平面;

(2) 把抛物线 $v = 4(u+1)$ 左方的区域映照成上半平面,

解: (1) 见图 6.3

故 $w = -i \left(\frac{z}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{z^2}{2} - 1} \right)^2$ 即为所求;

(2) 见图 6.4.

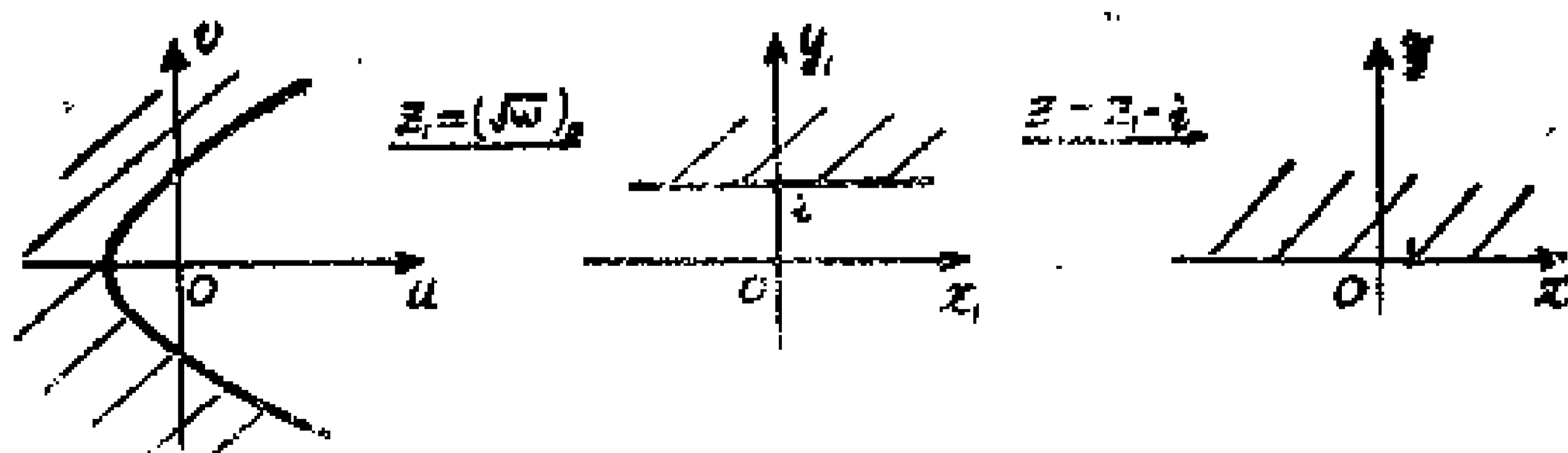


图 6.4

故 $z = z_1 - i = (\sqrt{w})_0 - i$ 即为所求 ($0 < \arg w < 2\pi$).

11. 试把圆盘 $|z| < 1$ 保形映照成半平面 $\text{Im} w > 0$, 并且将点 $-1, 1, i$ 映照成 (1) $\infty, 0, 1$; 或 (2) $-1, 0, 1$.

解: (1) $w = k \frac{z-1}{z+1}$ 把 $1 \rightarrow 0$; $-1 \rightarrow \infty$; 故它把单位圆周映照成实轴。又按 $i \rightarrow 1$ 来选择 k , 则必把 $|z| < 1$ 映照为 $\text{Im} w > 0$ 由 $1 = k \frac{i-1}{i+1}$, 得 $k = -i$, 故 $w = i \frac{1-z}{1+z}$ 即为所求。

(2) $\because (-1, 1, z, i) = (-1, 0, w, 1)$.

$$\therefore \frac{z+1}{z-1} : \frac{i+1}{i-1} = \frac{w+1}{w} : \frac{1+1}{1}.$$

由此得 $w = \frac{z-1}{(2i-1)z + (2i+1)}$, 此即为所求。

12. 试把 $\text{Im} z > 0$ 保形映照成 $\text{Im} w > 0$, 并且把点

(1) $-1, 0, 1$; 或 (2) $\infty, 0, 1$ 映照成 $0, 1, \infty$.

解: (1) $\because (-1, 0, z, 1) = (0, 1, w, \infty)$

$$\therefore \frac{z+1}{z} : \frac{1+1}{1} = \frac{w}{w-1}.$$

由此得 $w = \frac{z+1}{-z+1}$, 此即为所求.

(2) $\because (\infty, 0, z, 1) = (0, 1, w, \infty)$.

$$\therefore \frac{1}{z} = -\frac{w}{w-1}, \quad \therefore w = \frac{1}{1-z} \text{ 此即为所求.}$$

13. 试作一单叶解析函数 $w = f(z)$ 把 $|z| < 1$ 映照成 $|w| < 1$, 并且使 $f(0) = \frac{1}{2}$, $f'(0) > 0$.

解: 设 $w = f(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ ($|a| < 1$), 将 $|z| < 1$

映照成 $|w| < 1$, 由 $f(0) = \frac{1}{2}$ 得 $\frac{1}{2} = -ae^{i\theta}$,

又 $f'(z) = e^{i\theta} \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2}$. 故由 $f'(0) > 0$,

得 $e^{i\theta}(1-|a|^2) > 0$. 但已知 $|a| < 1$, 故 $e^{i\theta} = 1$.

从而 $\theta = 0$, 因此, $a = -\frac{1}{2}$, 故 $w = \frac{2z+1}{z+2}$ 即为所求.

14. 证明 z_1 及 z_2 是关于圆 $C: \left| \frac{z-z_1}{z-z_2} \right| = k$.

($0 < k \neq 1$) 的对称点.

证法一: 参见书 P. 146 例.

证法二, 令 $z = x+iy$, $z_n = x_n+iy_n$, ($n=1, 2$) 代入

圆方程 $\left| \frac{z-z_1}{z-z_2} \right| = k$ ($0 < k \neq 1$) 得:

$$\left(x - \frac{x_1 - k^2 x_2}{1 - k^2} \right)^2 + \left(y - \frac{y_1 - k^2 y_2}{1 - k^2} \right)^2 =$$

$$= \frac{k^2 [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]}{(1 - k^2)^2}$$

即 $|z - z_0| = \rho$, 其中 $z_0 = \frac{z_1 - k^2 z_2}{1 - k^2}$, $\rho = \frac{k|z_1 - z_2|}{1 - k^2}$.

因为

$$|z_1 - z_0| = z_1 - \frac{z_1 - k^2 z_2}{1 - k^2} = \frac{k^2 z_2 - k^2 z_1}{1 - k^2} = \frac{k^2 (z_2 - z_1)}{1 - k^2}$$

$$|z_2 - z_0| = z_2 - \frac{z_1 - k^2 z_2}{1 - k^2} = \frac{z_2 - z_1}{1 - k^2}$$

所以, $|z_1 - z_0| \cdot |z_2 - z_0| = \frac{k^2}{(1 - k^2)^2} |z_2 - z_1|^2 = \rho^2$.

因此 z_1 和 z_2 是关于圆

$$\left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = k \quad (0 < k < 1) \text{ 的对称点.}$$

15. 在圆盘 $|z| < 1$ 中除去实轴上的半闭区间 $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$

得一区域, 试把这一区域保形映照成圆盘 $|w| < 1$.

解:

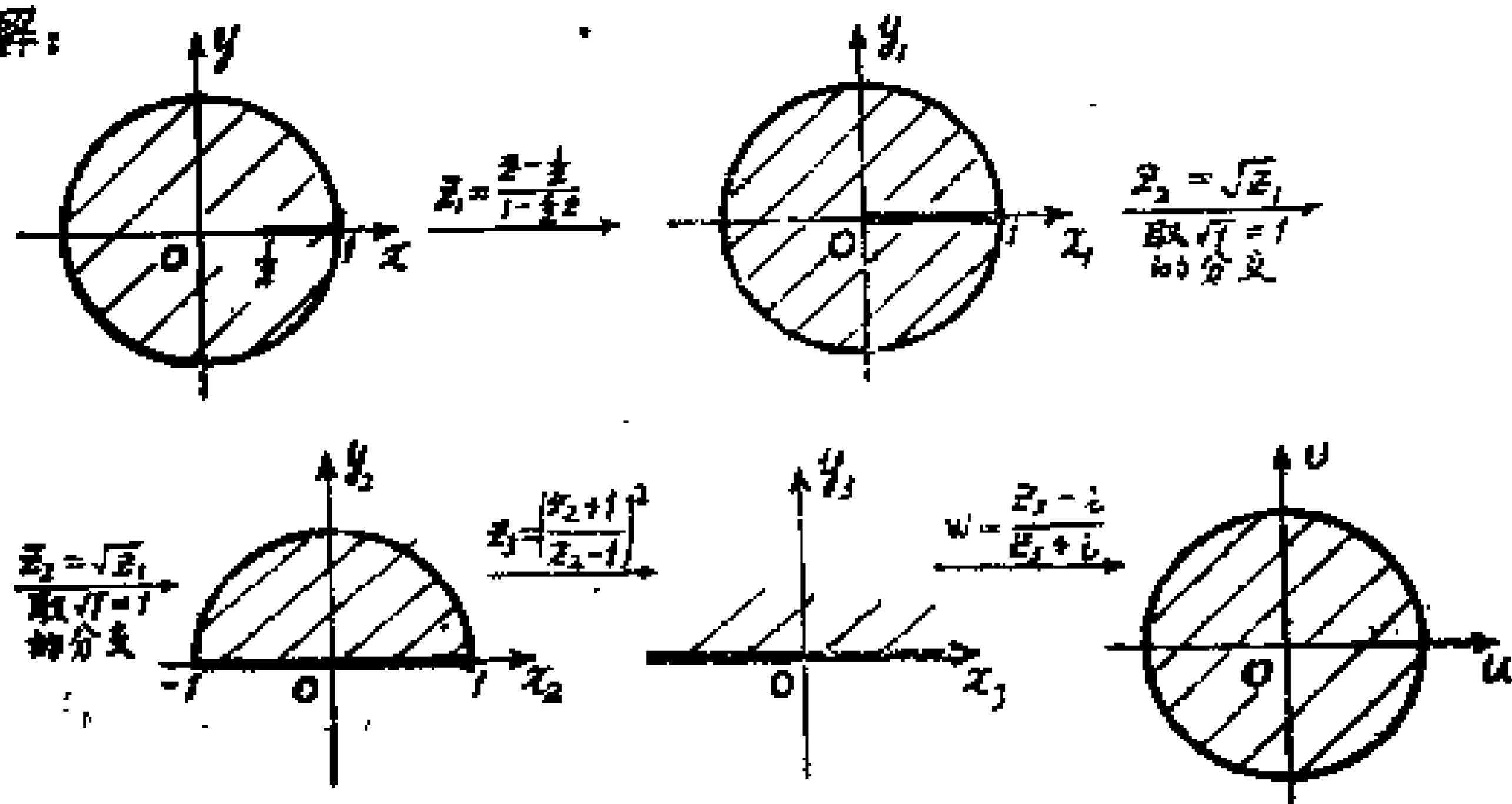


图6.5. (图中的 $\sqrt{-1} = 1$ 应为 $\sqrt{-1} = i$)

故 $w = \frac{(z_2 + 1)^2 - (z_2 - 1)i}{(z_2 + 1)^2 + (z_2 - 1)i}$ 即为所求, 其中 $z_2 = \sqrt{\frac{2z - 1}{2 - z}}$.

16. 试作保形映照:

(1) 把 $|z| < 1$ 及 $|z-1| < 1$ 的公共部分映照成 $|w| < 1$;

(2) 把扇形 $0 < \text{Arg} z < \alpha$ ($< 2\pi$), $|z| < 1$

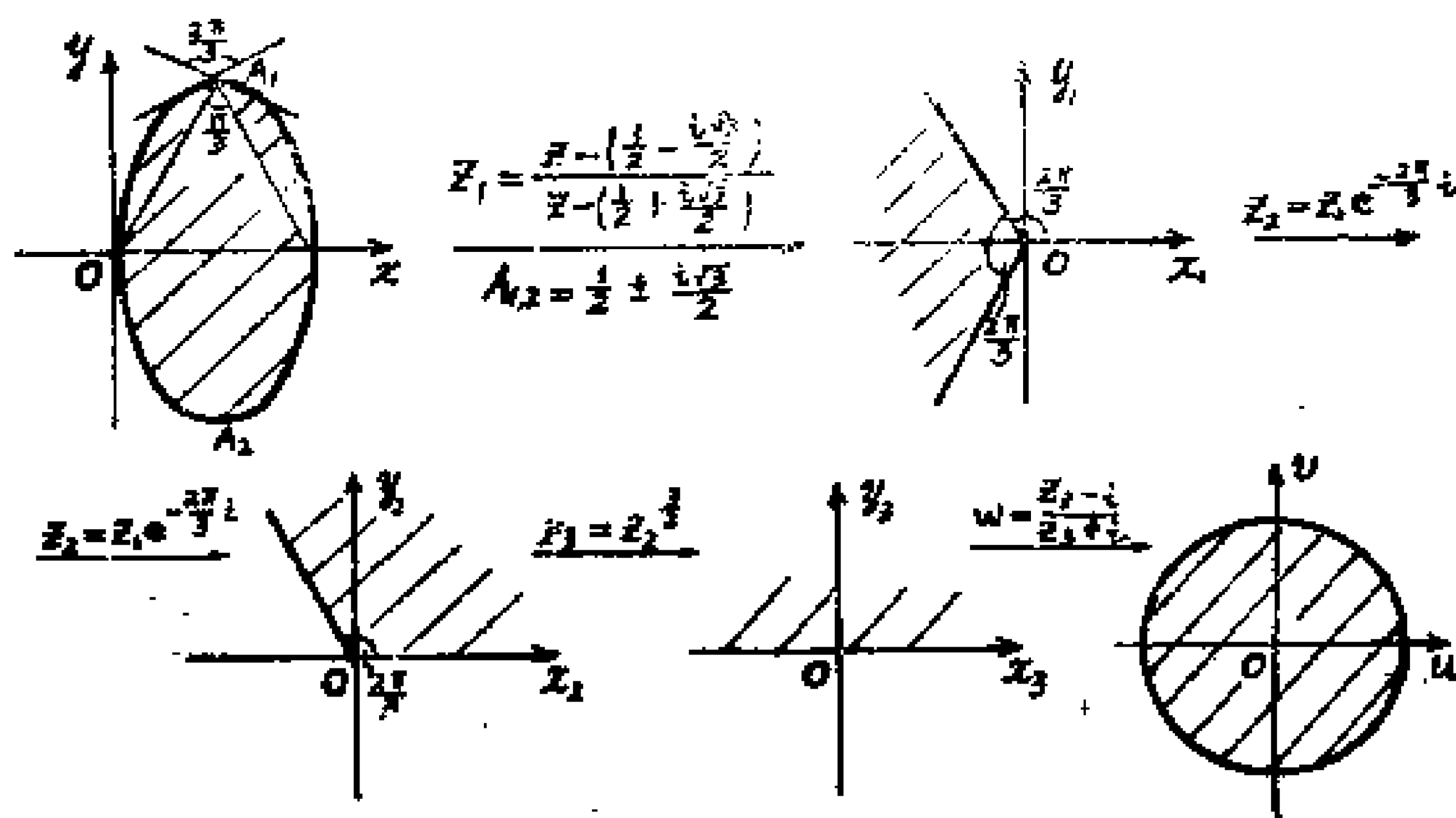
映照成 $|w| < 1$;

(3) 把圆环 $0 < a < |z| < b$ 除去实轴上的区间 (a, b) 而得的区域映照成 $|w| < 1$;

(4) 把圆 $|z| = 2$ 及 $|z-1| = 1$ 所夹的区域映照成 $|w| < 1$;

(5) 把圆 $|z| < 1$ 映照成带形 $0 < v < 1$, 并把 $-1, 1, i$ 映照成 ∞, ∞, i .

解 (1)



取 $z_2 = 1$ 时, 对应
 $z_3 = 1$ 的那一枝

图6.6

故 $w = \frac{z_1^{\frac{3}{2}} + i}{z_1^{\frac{3}{2}} - i}$ 即为所求, 其中 $z_1 = \frac{z - \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)}{z - \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)}$

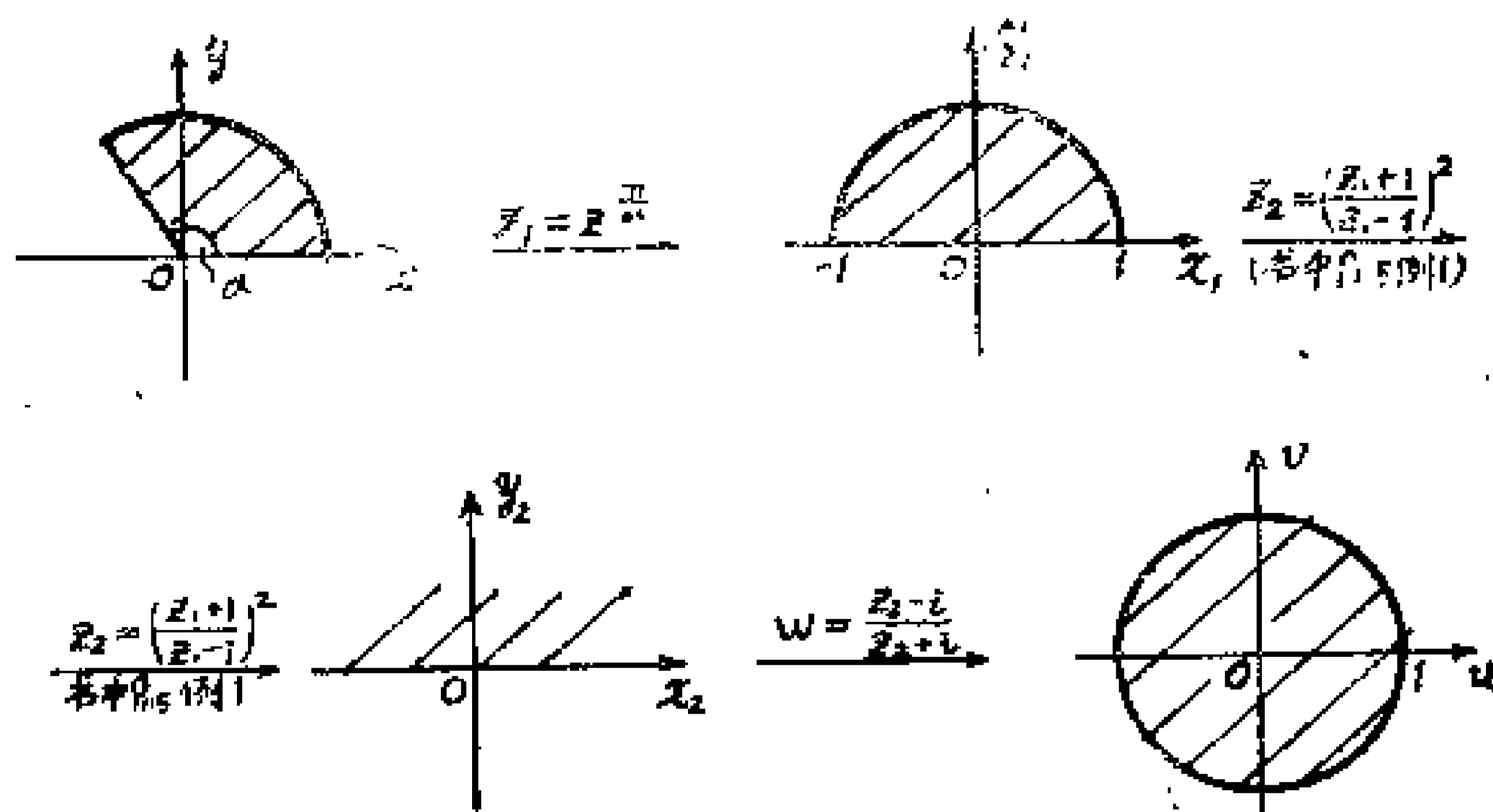


图 6.7

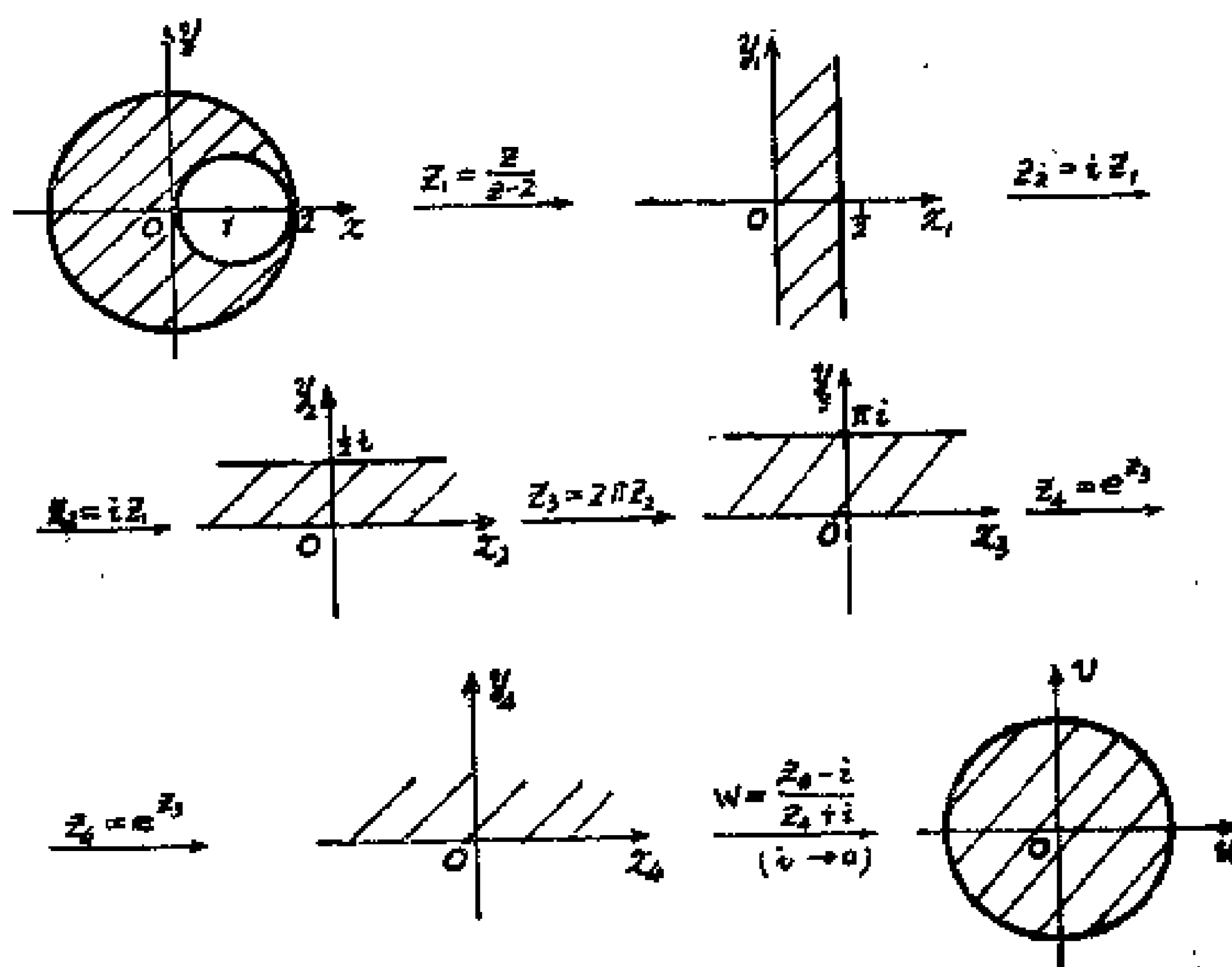


图 6.8

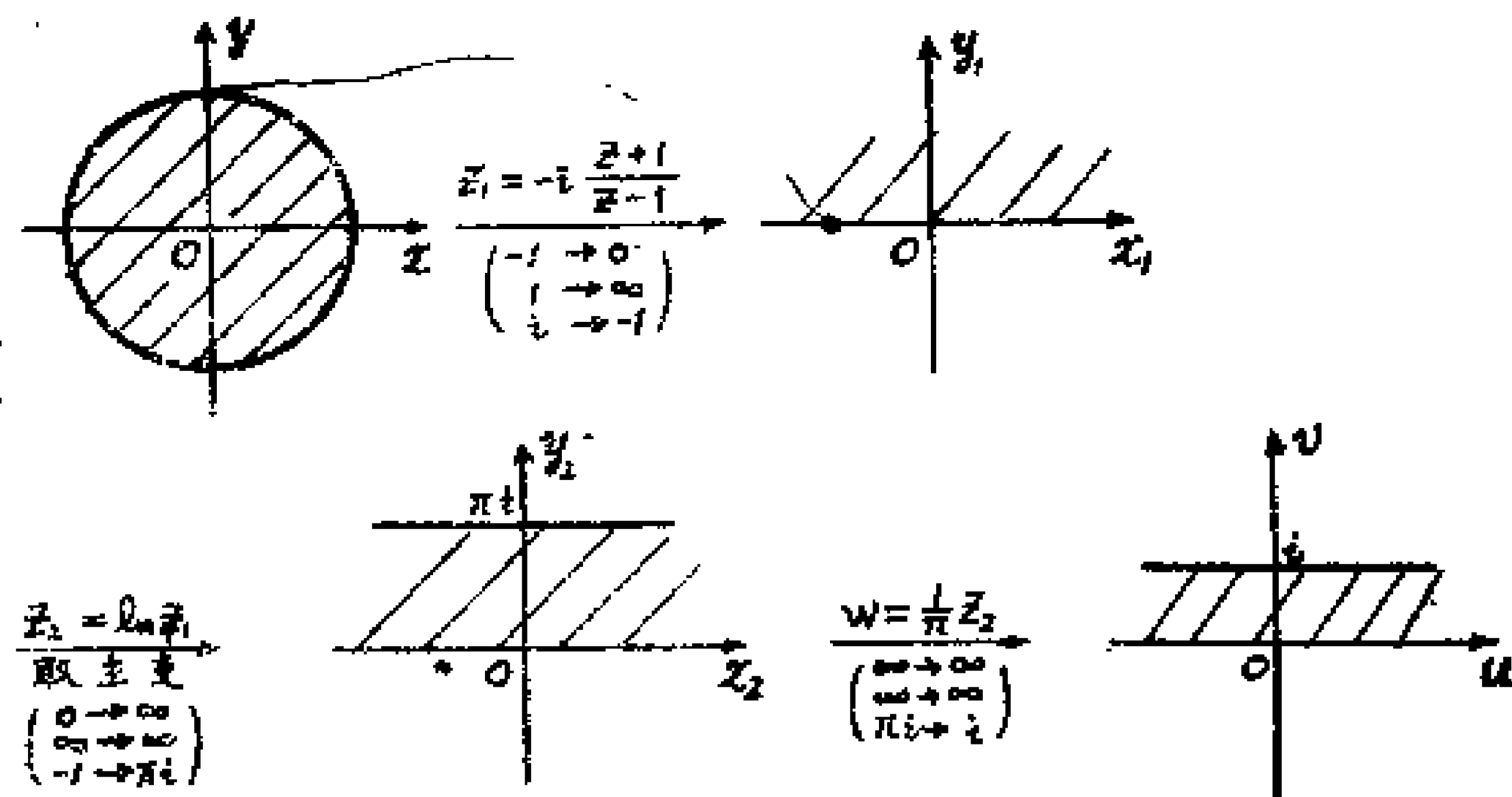
(2) 见图6.7

$$\text{故 } w = \frac{\left(z^{\frac{\pi}{\alpha}} + 1 \right)^2 - i \left(z^{\frac{\pi}{\alpha}} - 1 \right)^2}{\left(z^{\frac{\pi}{\alpha}} + 1 \right)^2 + i \left(z^{\frac{\pi}{\alpha}} - 1 \right)^2} \text{ 即为所求。}$$

(3) 见第七章解答。

(4) 见图6.8

$$\text{故 } w = \frac{e^{\frac{2\pi i z}{z-2}} - i}{e^{\frac{2\pi i z}{z-2}} + i} \text{ 即为所求。}$$



在以正实轴作割线的区域 图6.9 上图一排中式子改为
 域内分成的解析分枝中，点
 1 上沿取 $\ln 1 = 0$ 的分枝

$$z_1 = e^{-\frac{\pi}{2}i} \frac{z+1}{z-1}$$

综合得 $w = \frac{1}{\pi} \ln \left(-i \frac{z+1}{z-1} \right)$ ，容易验证它把 $-1, 1$,

i 变为 ∞ , ∞ , i , 故它即为所求的保形映照。

17 (第四章第20题) 设 D 是一有界区域, 其边界为简单曲线 C . 设函数 $f(z)$ 在闭区域 D 上解析, 并且不恒等于一常数. 试证: 如果 $|f(z)|$ 在 C 上是常数, 那么 $f(z)$ 在 D 内至少有一零点.

证: 用反证法. 假设 $f(z)$ 在 D 内没有零点, 又由条件容易推得 $f(z)$ 在 D 内不为常数. 于是根据最大模原理和第四题的结果可知 $|f(z)|$ 不能在 D 内达到最大值和最小值.

另一方面, 因为 $f(z)$ 在闭区域 \overline{D} 上解析, 所以 $|f(z)|$ 在 \overline{D} 上连续, 故在 \overline{D} 上必可达到最大值和最小值.

由此可见, $|f(z)|$ 必在边界 C 上达到最大值和最小值. 但 $|f(z)|$ 在 C 上是常数, 从而 $|f(z)|$ 在 \overline{D} 上也为常数, 与题设矛盾, 因此 $f(z)$ 在 D 内至少有一零点.

第七章 解析开拓

1. 证明对称原理的推广

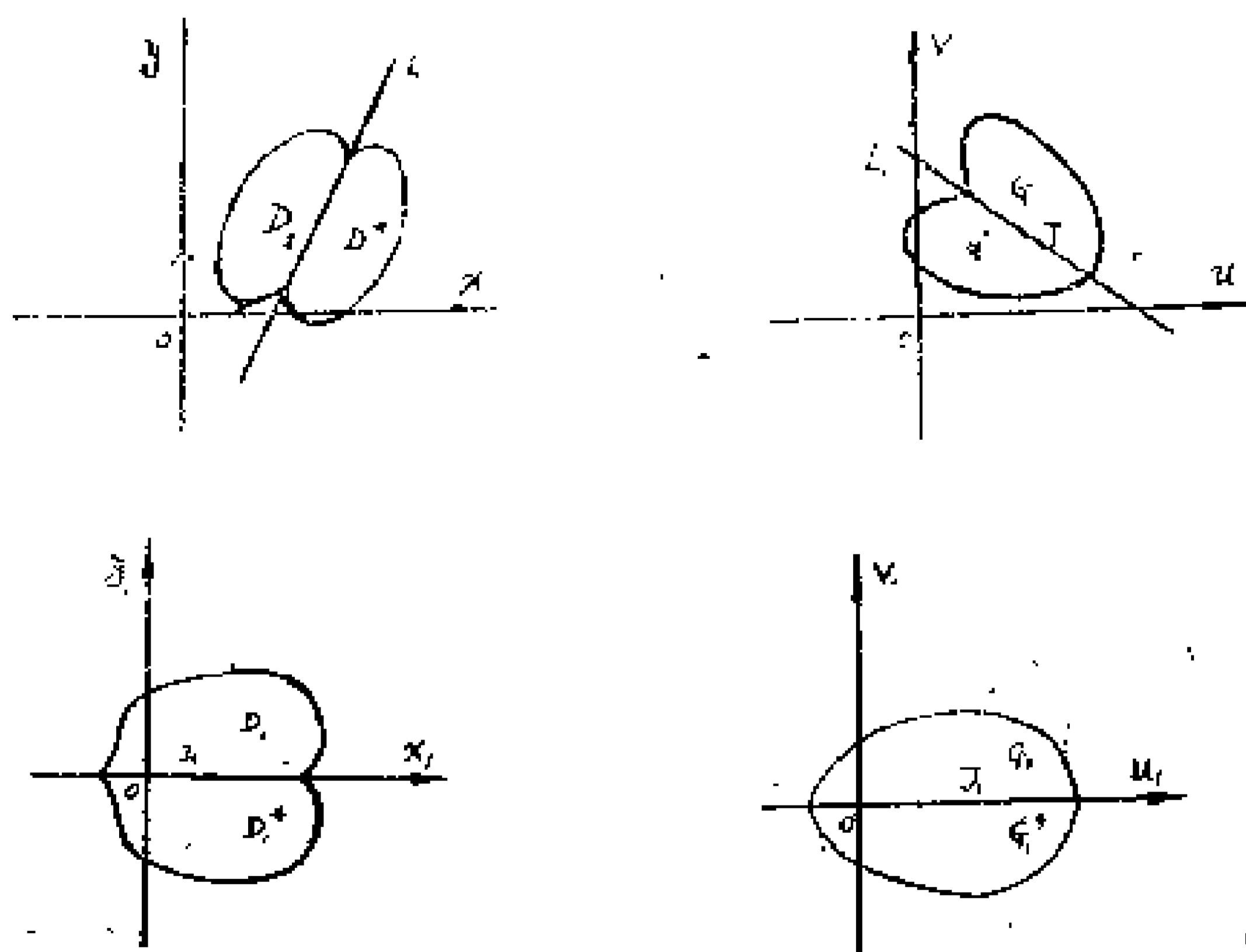
推广到任意直线

设 D 是在 z 平面上位于直线 L 某一边的区域, 其边界是一分段光滑简单闭曲线, 其中有一段是 L 上一个线段 I (不包含端点)。设函数 $W = f(z)$ 在 $D \cup I$ 连续, 在 D 内解析, 而且 $J = f(I)$ 在 W 平面的某一直线 L_1 上。考虑与区域 D 关于 L 为对称的区域 D^* , 并且把函数 $W = f(z)$ 的定义扩充到 D^* , 如果 $z^* \in D^*$, 并且 $z(\in D)$ 与 z^* 是关于 L 对称的, 那么 $f(z^*)$ 与 $f(z)$ 是关于 L_1 的对称点。在这些条件下, $W = f(z)$ 在 $D^* \cup I$ 上是解析的。

证法一: 设 $Z = az + b$ 将 L 变为 Z 平面上的实轴, 则区域 D 和 D^* 分别映照为 D_1 和 D_1^* , I 映照为 I_1 , 而 I_1 在实轴上, 且 D_1 和 D_1^* 关于实轴对称, 它的逆映照 $z = \frac{Z}{a} - \frac{b}{a}$ 则将 D_1 、 D_1^* 和 I_1 分别映照为 D 、 D^* 和 I 。(见图7.1)

同样地, 有 $W = cw + d$ 将 L_1 变为 W 平面上的实轴, 此时区域 G 和 G^* 分别映照为 G_1 和 G_1^* 。 J 映照为 J_1 而 J_1 在实轴上, 且 G_1 和 G_1^* 关于实轴对称。它的逆变换 $w = \frac{W}{c} - \frac{d}{c}$ 将 G_1 、 G_1^* 和 J_1 分别映照为 G 、 G^* 和 J 。

考虑复合函数 $W = cf\left(\frac{Z}{a} - \frac{b}{a}\right) + d = F(Z)$, 它是 D_1 上



(图7.1)

的解析函数，在 $D_1 \cup I_1$ 上满足对称原理的所有条件，因此它可开拓到关于 I_1 对称的区域 D_1^* 上去，成为 $D_1 \cup I_1 \cup D_1^*$ 上的解析函数，且当 $Z \in D_1$ ， $Z^* \in D_1^*$ 时， Z 和 Z^* 关于实轴对称， $F(Z)$ 、 $F(Z^*)$ 关于 W 平面上的实轴对称。当 $z \in D^*$ 时，对应的 $Z (= az + b) \in D_1^*$ ，若补充规定

$f(z) = \frac{1}{c} F(az + b) - \frac{d}{c}$ ，则 $f(z)$ 在 $D^* \cup D \cup I$ 上解析，且

当 $z \in D$ ， $z^* \in D^*$ ， z 和 z^* 关于 L 对称时， $f(z^*)$ 和 $f(z)$ 关于 L_1 对称。由于变换 $z = \frac{Z}{a} - \frac{b}{a}$ 把 D_1 ， I_1 ， D_1^* 映照到 D ， I ，

D^* ，可知复合函数 $W = F(az + b) = cf(z) + d$ 在 $D \cup I \cup D^*$

上解析，因此 $w = \frac{W}{c} - \frac{d}{c} = \frac{1}{c} [cf(z) + d] - \frac{d}{c} = f(z)$

在 $D \cup D^* \cup I$ 上解析。

证法二：作变换 $Z = az + b$ ，它将 I 变为 Z 平面上的实轴。将 I 变为 I_1 ，而 I_1 在 Z 平面的实轴上，将区域 D 和 D^* 分别变为关于 Z 平面上实轴对称的 D_1 和 D_1^* ，而关于 L 对称的点 z 和 z^* 分别变为 Z 平面上关于实轴对称的点 Z 和 \bar{Z} 。

作 $W = cw + d$ ，它将 I_1 变为 W 平面上的实轴，将 J 变为 J_1 ，而 J_1 在 W 平面的实轴上，又由于 $w = f(z)$ 在 D 内及 I 上所有点的集合上连续，在 D 内解析，可知

$$W = \Phi(Z) = cf\left(\frac{Z}{a} - \frac{b}{a}\right) + d$$

在 D_1 内及 J_1 上所有点的集合上满足本章定理1.1的条件，因此 $W = \Phi(Z)$ 的定义域能扩充到 D_1^* 上；

$$W = \begin{cases} \Phi(Z), & \text{当 } Z \in D_1 \\ \Phi(\bar{Z}), & \text{当 } Z \in D_1^* \end{cases} \quad (1)$$

并且它在 $D_1 \cup D_1^* \cup I_1$ 上是解析的，它将 Z 平面上关于实轴对称的点 Z 和 \bar{Z} 变为 W 平面上关于实轴对称的点 W 和 \bar{W} 。我们把 (1) 仍记作 $W = \Phi(Z)$ 。

变换 (1) 经过 $W = cw + d$ 的逆变换 $w = \frac{W}{c} - \frac{d}{c}$ 及变换 $Z = az + b$ ，得

$$w = \frac{1}{c} \Phi(az + b) - \frac{d}{c} \quad (2)$$

它把 I 变为 J ，把关于 L 对称的 z 和 z^* 变成关于 L_1 的对称点，并且它在 $D \cup D^* \cup I$ 上解析。

变换 (2) 即

$$w = \begin{cases} f(z), & z \in D, \\ \frac{1}{c} \Phi\left(\frac{a}{z} + \frac{b}{a}\right) - \frac{d}{c}, & z \in D^*. \end{cases} \quad (3)$$

因此 $w = f(z)$ 的定义域能根据(3)扩充到 D^* , 且扩充定义后满足结论中所述的各条件。

在上面的推广中, 若将直线 L, L_1 改为圆周时, 上述证明中若将 $Z = az + b$ 和 $W = cw + d$ 改为分式线性变换

$$Z = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} \quad \text{和} \quad W = \frac{a_2 w + b_2}{c_2 w + d_2}$$

它们分别将圆周 L 和 L_1 变为 Z 平面和 W 平面上的实轴, 则知最后结论不变。

2. 设函数 $w = f(z)$ 在 $\operatorname{Im} z \geq 0$ 上单叶解析, 并且把 $\operatorname{Im} z > 0$ 保形映照成 $|w| < 1$; 把 $\operatorname{Im} z = 0$ 映照成 $|w| = 1$. 证明 $f(z)$ 一定是分式线性函数。

证: 因为 $w = f(z)$ 把 $\operatorname{Im} z = 0$ 映照成 $|w| = 1$, 所以存在 $w_0: |w_0| = 1$, 使 $f(\infty) = w_0$, 考虑 $w = f(z)$ 的反函数 $z = g(w)$, 由于它在 $|w| \leq 1$ 上除 $w = w_0$ 外是单叶解析的, 且在 $|w| = 1$ 上 (除 $w = w_0$ 外) 取实值, 故由推广的对称原理, $z = g(w)$ 可经 $|w| = 1$ (除去 $w = w_0$) 解析开拓到圆外, 得到在扩充的 w 平面上除 $w = w_0$ 外的单叶解析函数。

另外易知 w_0 是函数 $G(w) = \frac{1}{g(w)}$ 的可去奇点, 规定 $G(w_0) = 0$, 则 $G(w)$ 在 w_0 的邻域内单叶解析, 从而 $G'(w_0) \neq 0$. 因此 w_0 是 $G(w)$ 的一阶零点, 故在扩充的 w 平面上 w_0 是 $g(w)$ 的唯一的奇点——一阶极点. 由第四章第13题的结果, 可知 $g(w)$ 为分式线性函数, 由此可知 $f(z)$ 必为分式线性函数。

3. 级数 $-\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - \dots$ 在 $0 < |z| < 1$ 内所定义的函数是否可以解析开拓为级数 $-\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \dots$ 在 $|z| > 1$ 内所定义的函数?

$$\begin{aligned}\text{解: } -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - \dots &= -\frac{1}{z}(1 + z + z^2 + \dots) \\ &= -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z(1-z)} \quad 0 < |z| < 1 \quad (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \dots &= \frac{1}{z^2}(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots) \\ &= \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z(1-z)} \quad |z| > 1 \quad (2)\end{aligned}$$

又函数 $-\frac{1}{z(1-z)}$ 在复平面上除 $z=0$ 和 $z=1$ 外处处解析，故这一函数元素既是函数元素(1)，又是函数元素(2)的直接解析开拓。因此第一个级数在 $0 < |z| < 1$ 内所定义的函数可以解析开拓为第二个级数在 $|z| > 1$ 内所定义的函数。

4. 证明：级数 $f_1(z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 \dots$ 与

$$f_2(z) = \ln 2 - \frac{1-z}{2} - \frac{(1-z)^2}{2 \cdot 2^2} - \frac{(1-z)^3}{3 \cdot 2^3} - \dots \text{ 在}$$

$|z| < 1$ 与 $|z-1| < 2$ 内所定义的函数互为直接解析开拓。

$$\text{证: } \because f_1(z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \dots = \ln(1+z),$$

$$|z| < 1,$$

$$f_2(z) = \ln 2 - \frac{1-z}{2} - \frac{(1-z)^2}{2 \cdot 2^2} - \frac{(1-z)^3}{3 \cdot 2^3} - \dots$$

$$= \ln 2 + \frac{z-1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{z-1}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{z-1}{2} \right)^3 + \dots$$

$$= \ln 2 + \ln \left(1 + \frac{z-1}{2} \right) = \ln(1+z).$$

$$|z-1|<2,$$

又在 $|z|<1$ 与 $|z-1|<2$ 的公共部分 $|z|<1$ 内 $f_1(z)=f_2(z)$ ，所以两个级数所定义的函数互为直接解析开拓。

5. 证明级数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n$ 所定义的函数在左半平面内解析，并可解析开拓到除掉点 $z=0$ 外的整个复平面。

证：在级数的收敛区域内，

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1+z}{1-z}}$$

其收敛区域为 $\left|\frac{1+z}{1-z}\right|<1$ ，而根据模的几何意义知收敛区域即 $x<0$ ，故该级数所定义的函数在左半平面内解析。

又因 $\frac{1}{1-\frac{1+z}{1-z}}=\frac{z-1}{2z}$ 显然 $z=0$ 为它的奇点，而在 $z\neq 0$

处它是解析的。因此该级数所定义的函数元素可以解析开拓到除点 $z\neq 0$ 外的整个复平面。

6. 证明：如果整函数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ 在实轴上取实值，那么系数 a_n 都是实的。

证法一：因为整函数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ 在复平面上解析，

且在实轴上取实值，根据唯一性定理，可以把下半平面上的 $f(z)$ 看作上半平面上的 $f(z)$ 由对称原理解析开拓而得到的，

于是在下半平面应有: $\overline{f(z)} = f(z)$.

$$\text{即 } \overline{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} \overline{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} z^n$$

因此 $\overline{a_n} = a_n$, 这就表示 a_n 是实的 ($n=0, 1, 2, \dots$).

证法二: 整函数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在复平面上解析, 故在

每一点各阶导数都存在, 且 $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ ($n=0, 1, \dots$)

因为 $f(z)$ 在实轴上取实值, 即当 $z=x$ 时, $f(z) = \bar{f}(x)$ 为实数, 从而对任意实数 x_0 , $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

是实数。一般地, 对任意正整数 n ,

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} \text{ 也是实数,}$$

于是 $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, ($n=0, 1, 2, \dots$) 均为实数

$$(f^{(0)}(0) = f(0) \text{ 是实数}).$$

7. 试问下列实变数实值函数能否解析开拓到复平面上:

$$(1) f(x) = |x|;$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (\text{当 } x \neq 0 \text{ 时}), \\ 0 & (\text{当 } x = 0 \text{ 时}); \end{cases}$$

(3) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上任一点可展开成实幂级数。

解: 定义于区间 I 上的实值函数 $f(x)$ 解析开拓到复平面上的意义是: 如果存在包含 I 的区域 D 上的解析函数 $F(z)$,

使当 $z = x \in I$ 时, $F(x) = f(x)$.

(1) $f(x) = |x|$ 不能解析开拓到复平面上. 因为 $f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 处不可导.

(2) 所给函数 $f(x)$ 不能解析开拓到复平面上, 因为 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的邻域内不能展开成幂级数.

(3) 在 $[a, b]$ 上取点 x_1 , 作幂级数

$$f(x) = \sum_0^{\infty} a_n^{(1)} (x - x_1)^n \text{ 在 } I_1: |x - x_1| < r_1 \text{ 收敛, } r_1 \text{ 为}$$

收敛半径. 将级数中的 x 换成 z 得级数 $\sum_0^{\infty} a_n^{(1)} (z - x_1)^n$ 在

$c_1: |z - x_1| < r_1$ 收敛, c_1 是收敛圆. 设其和为

$$f_1(z) = \sum_0^{\infty} a_n^{(1)} (z - x_1)^n. \text{ 在 } [a, b] \text{ 上每一点都能作上述幂}$$

级数. 根据有限覆盖定理, 存在有限个点 x_1, x_2, \dots, x_m . 而相

应地得有限个幂级数 $f_i(z) = \sum_0^{\infty} a_n^{(i)} (z - x_i)^n$, 在 $c_i:$

$|z - x_i| < r_i$ 收敛, c_i 是收敛圆 ($i = 1, \dots, m$). 令 $D = \bigcup_1^m c_i$ 显

然 $D \supset I$. 则得到在 D 内单值解析函数 $F(z)$. 在 c_i 内 $F(z) = f_i(z)$; 在 $[a, b]$ 上 $F(x) = f(x)$ 即 $f(x)$ 可开拓到复平面.

8. 证明 $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$ 的自然边界是 $|z| = 1$.

证: 先证单位圆 $|z| = 1$ 上形如: $z_0 = e^{2\pi i \frac{p}{q}}$ (p, q 为正整数, 且互质) 的每一点都是 $f(z)$ 的奇点.

为此令 $z = rz_0 = re^{2\pi i \frac{p}{q}}$ ($0 < r < 1$)

$$f(z) = \sum_{n=1}^{q-1} z^{n!} + \sum_{n=q}^{\infty} z^{n!}$$

当 $n \geq q$ 时, $z^{n!} = (rz_0)^{n!} = r^n$. 对于 $M = 2q + N$, 其中 N 是任意大的正整数, 有:

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| \sum_{n=1}^{q-1} z^{n!} + \sum_{n=q}^{\infty} r^n \right| > \sum_{n=q}^M r^n - \sum_{n=1}^{q-1} |z|^{n!} \\ &> \sum_{n=q}^M r^{M!} - \sum_{n=1}^{q-1} 1^{n!} = r^{M!} (M - q + 1) - (q - 1) \end{aligned}$$

令 $r \rightarrow 1 - 0$, 就有 $|f(z)| \geq N + 2$, 亦即可找到 $r_0 (0 < r_0 < 1)$ 使得当 $r_0 < r < 1$ 时, $|f(z)| > N$, 由于 N 是任意大的正整数, 所以有 $\lim_{r \rightarrow 1-0} |f(z)| = \infty$, 因此 z_0 是 $f(z)$ 的奇点.

其次, 设 $z = e^{2\pi i a} (a \neq \frac{q}{p})$ 是单位圆上异于 z_0 的任一点.

由于在点 z 的任何邻域内总有形如 z_0 的点, 所以, $z = e^{2\pi i a}$ 是形如 z_0 点的聚点, 从而是 $f(z)$ 的奇点.

所以, 单位圆上的每一点都是 $f(z)$ 的奇点, 从而 $|z| = 1$ 是 $f(z)$ 的自然边界.

9. 函数 $w = \sqrt{e^z}$ 是否是多值解析函数?

设: $z = x + iy$, 则 $w_k = e^{\frac{x}{2}} \cdot e^{i(\frac{1}{2}y + k\pi)}$ ($k = 0, 1$)

它们都定义在复平面 D 上.

显然, 点 z 沿任一闭曲线绕行复回原处时, w_0 与 w_1 都分别取其各自的确定值, 因此由函数元素 (w_0, P) 和 (w_1, P) 中的任何一个都不能借助于解析开拓而得到另一个, 所以函数

$w = \sqrt{e^z}$ 不是多值解析函数，而是代表两个不同的单值解析函数： $e^{\frac{z}{2}}$ 和 $e^{-\frac{z}{2}}$ 。

10. 试作函数 $f(z) = \sqrt{z+1}$ 的黎曼面。

解：我们依次取 $w = \sqrt{z+1}$ 在下半平面、右半平面 ($x > -1$)、上半平面及左半平面 ($x < -1$) 内的解析分枝如下：

$$g_k(z) = \sqrt{|z+1|} e^{i\frac{1}{2}\arg(z+1)}$$

$$\left(-\pi + k \cdot \frac{\pi}{2} < \arg(z+1) < k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

并且把这些函数的定义域分别记作 G_k ：

$$-\pi + k \cdot \frac{\pi}{2} < \arg(z+1) < k \cdot \frac{\pi}{2} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

考虑函数元素链

$(g_{-1}, G_{-1}), (g_0, G_0),$

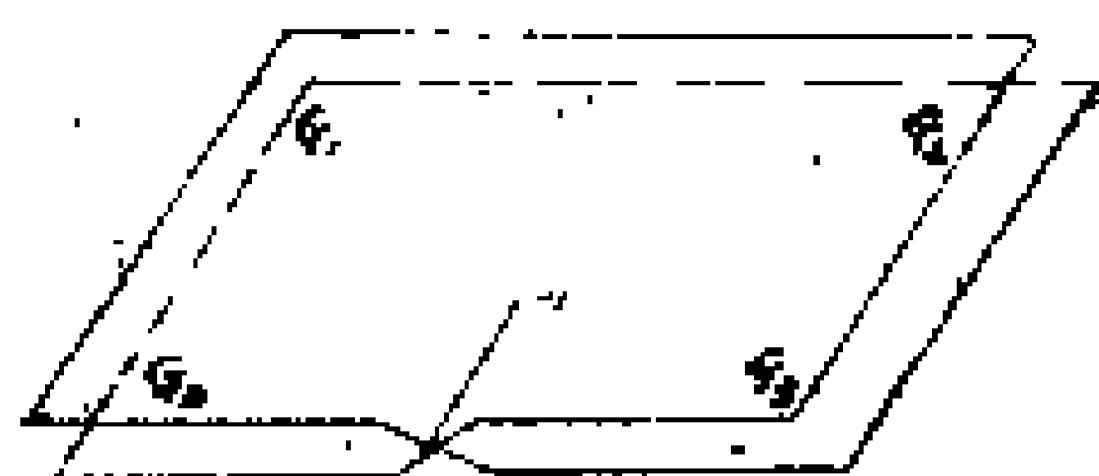
$(g_1, G_1), \dots, (g_8, G_8) \dots$

凡两函数元素标号彼此相差为 8 的倍数时，为相同函数元素。因此与上列各解析分枝相对应，只有 8 个不同的函数元素：

$(g_0, G_0), (g_1, G_1), \dots, (g_7, G_7). \quad (*)$

在 (*) 中，每个函数元素是它相邻的函数元素的直接解析开拓，而 (*) 中所有函数元素确定一个一般解析函数，即 $w = \sqrt{z+1}$ ，它是一个双值函数，

把函数元素 (g_k, G_k) 和 (g_{k+8}, G_{k+8})



(图7.2)

($k=0, 1, 2, 3$) 的定义区域看作在不同平面上, 并用纸片作出它们的模型, 分别粘连 G_k 与 G_{k+1} ($k=0, 1, 2, \dots, 6$) 的公共区域, 并且最后粘连 G_7 与 G_0 的公共区域, 于是最后得到一个有 2 叶的面, 即 $w = \sqrt{z+1}$ 的黎曼面 (图 7.2).

-1 和 ∞ 不在上述黎曼面内, 它们都是双值函数 $f(z) = \sqrt{z+1}$ 的枝点。

11. 试用对称原理把下列图形所示的区域分别保形映照为上半平面:

解 (1) 见图 7.3

沿 $(-1, 1)$ 作辅助割线, 考虑上半个带形 D .

$z_2 = f(z) = \frac{e^{2z} - \operatorname{ch} 2}{\operatorname{sh} 2}$ 把区域映照成上半平面 D_2 .

令 $I = (-1, 1)$ (z 平面的实轴上区间).

则 $I = f(I) = (-1, 1)$ (z_2 平面的实轴上区间) 且 $f(z)$ 在 D 内单叶, 在 $D+I$ 上连续, 因此可将 $f(z)$ 解析开拓到区域 G 上, 且 $f(z)$ 把 G 保形映照为 D_2' , 然后利用儒可夫斯基函数的反函数 $w = z_2 + \sqrt{z_2^2 - 1}$ (取当 $z_2 = 0$ 时 $w = i$ 的

那一解析分枝) 将 D_2' 映照为上半平面 G_1 , 综合得函数

$$\begin{aligned} w &= \frac{e^{2z} - \operatorname{ch} 2}{\operatorname{sh} 2} + \sqrt{\left(\frac{e^{2z} - \operatorname{ch} 2}{\operatorname{sh} 2}\right)^2 - 1} \\ &= \frac{e^{2z} - \operatorname{ch} 2}{\operatorname{sh} 2} + \frac{\sqrt{e^{4z} - 2e^{2z}\operatorname{ch} 2 + 1}}{\operatorname{sh} 2}, \end{aligned}$$

它把 G 保形映照为上半平面 G_1 .

解 (2) 见图 7.4

沿 $(-\infty, -1), (1, +\infty)$ 作辅助割线, 考虑上半平

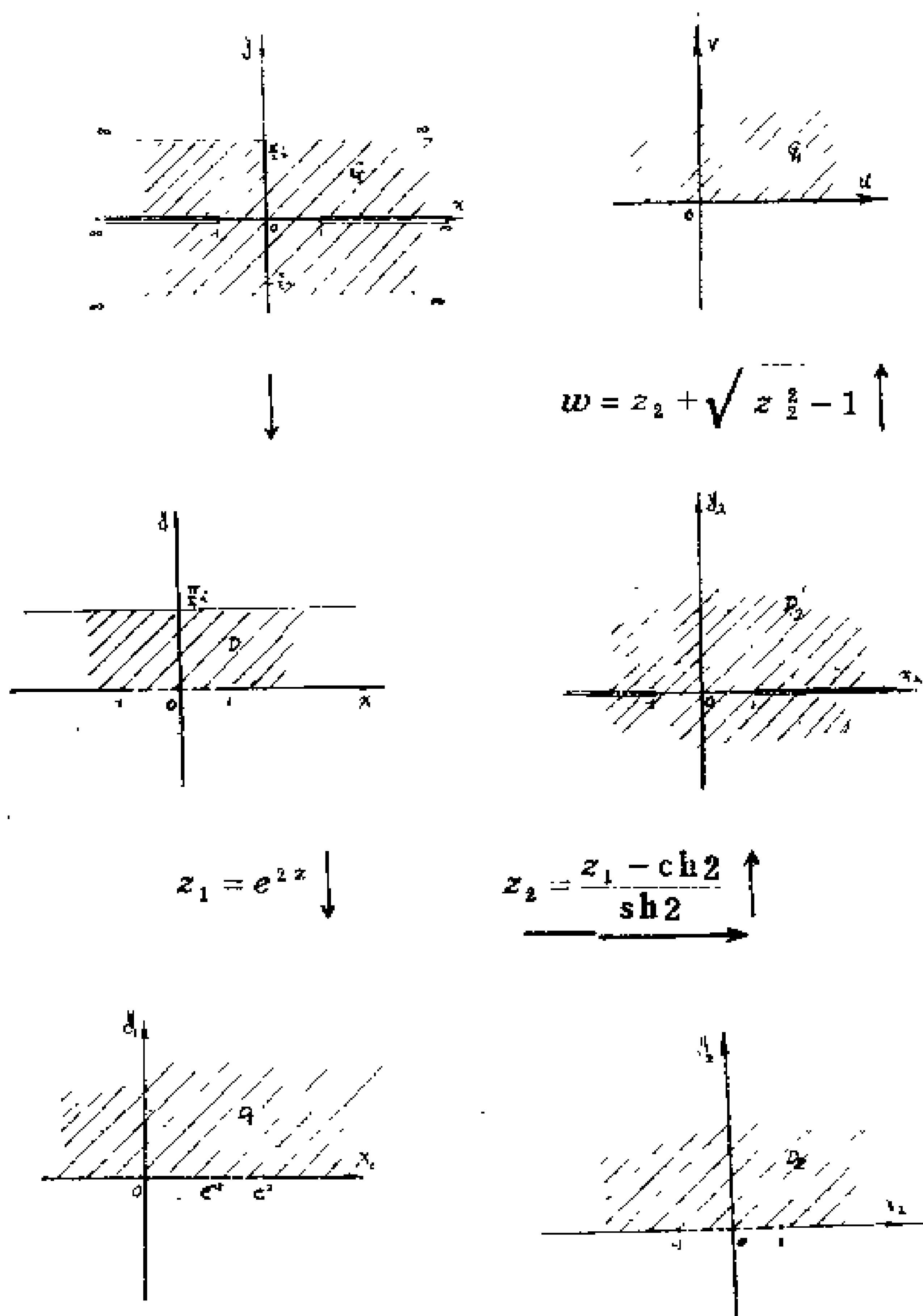


图7.3

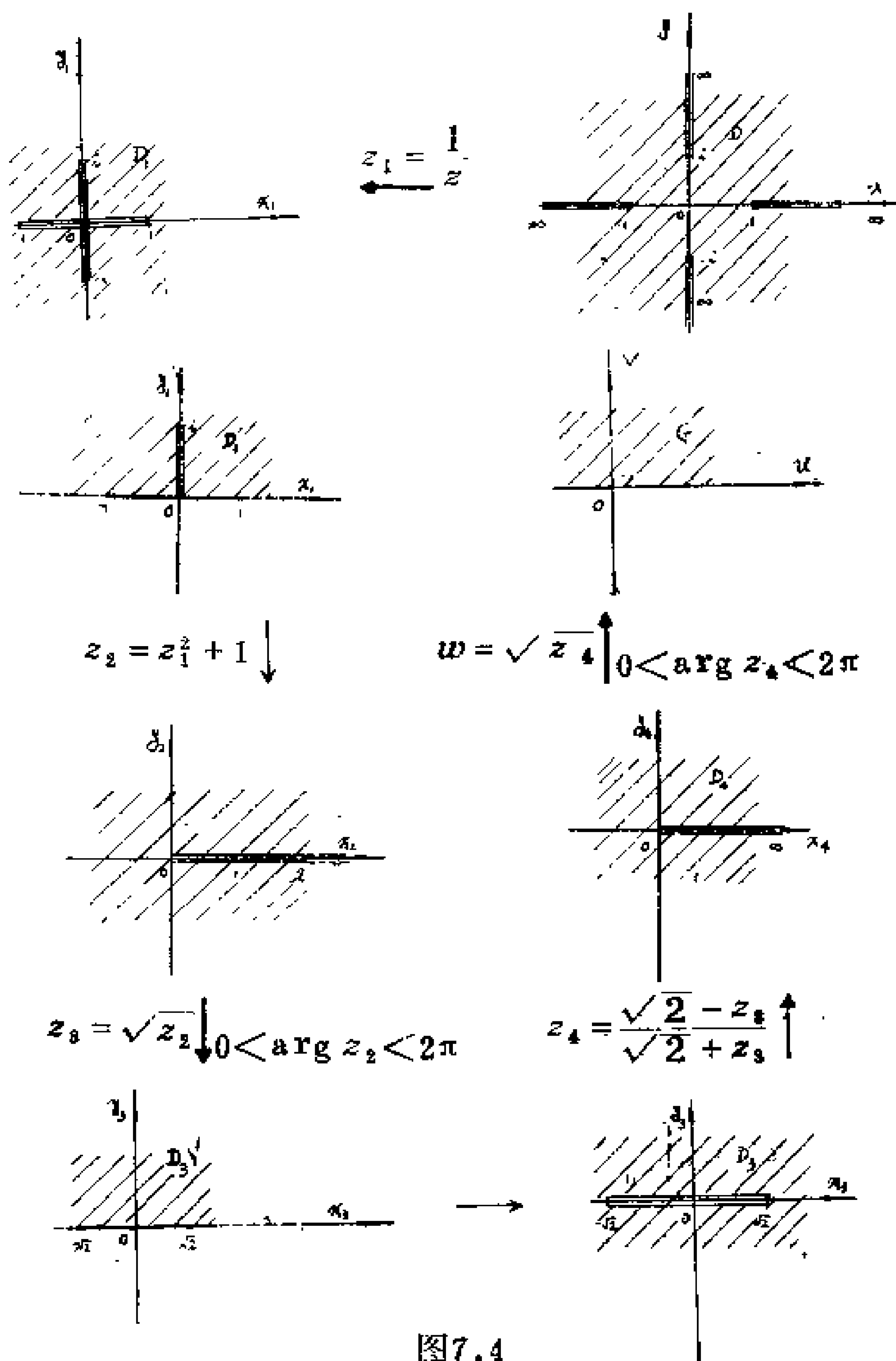


图7.4

面 D'_1 , 函数 $z_3 = \sqrt{z_1^2 + 1}$, 在 D'_1 符合对称原理条件, 故它可通过实轴上区间 $I = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ 解析开拓到区域 D_1 上, 并将 D_1 映照为 D_3 , 令 $z_4 = \frac{\sqrt{2} - z_3}{\sqrt{2} + z_3}$, 它把 D_3 映照成 D_4 , $w = \sqrt{z_4}$ 将 D_4 映照成上半平面 G , 最后得 $w = \sqrt{\frac{\sqrt{2}z - \sqrt{1+z^2}}{\sqrt{2}z + \sqrt{1+z^2}}}$, 它把 D 保形映照为上半平面 G .

12. 证明: 把 z 平面上的单位圆盘双方单值保形映照成 w 平面上多角形 p 的映照公式是

$$w = C \int_{z_0}^z \prod_{k=1}^n (z - z_k)^{\frac{\beta_k}{\pi} - 1} dz + C'$$

其中 β_k 是 p 的各顶角的弧度, z_k 是 $|z| = 1$ 上与 p 的各顶点相对应的点, z_0, C, C' 是复常数.

证: 设 $\xi = \frac{z-i}{z+i}$ 将单位圆盘 $|z| \leq 1$ 双方单值地保形映照成上半平面 $\text{Im } \xi \geq 0$, 且

$$\alpha_k = \frac{z_k - i}{z_k + i}, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

已知将 $\text{Im } \xi \geq 0$ 双方单值保形映照成 w 平面上多角形 p 的映照是

$$w = C_0 \int_{\xi_0}^{\xi} \prod_{k=1}^n (\xi - \alpha_k)^{\frac{\beta_k}{\pi} - 1} d\xi + C_1,$$

式中 ξ_0, C_0 及 C_1 是常数.

将 $\xi = \frac{z-i}{z+i}, \alpha_k = \frac{z_k - i}{z_k + i}$ 代入上式, 得

$$w = C_0 \int_{z_0}^z \left\{ \prod_{k=1}^n \left(\frac{z-i}{z+i} - \frac{z_k-i}{z_k+i} \right)^{\frac{\beta_k}{\pi}-1} \right\} \frac{2i}{(z+i)^2} dz + C_1$$

$$\left(z_0 = \frac{z_0-i}{z_0+i} \right)$$

$$= C_0 \int_{z_0}^z \left\{ \prod_{k=1}^n \left(\frac{2i(z-z_k)}{(z+i)(z_k+i)} \right)^{\frac{\beta_k}{\pi}-1} \right\} \frac{2i}{(z+i)^2} dz + C_1$$

由于 $\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n = (n-2)\pi$, 所以 $\sum_{k=1}^n \left(\frac{\beta_k}{\pi} - 1 \right) = -2$,

故 $w = C \int_{z_0}^z \sum_{k=1}^n (z-z_k)^{\frac{\beta_k}{\pi}-1} dz + C'$, 其中

$$C = 2iC_0 \prod_{k=1}^n \left(\frac{2i}{z_k+i} \right)^{\frac{\beta_k}{\pi}-1}, \quad C' = C_1.$$

13. 求作把单位圆盘映照成正方形内部的单叶函数。

解: 将正方形放在如图7.5所示的位置上, 依黎曼存在

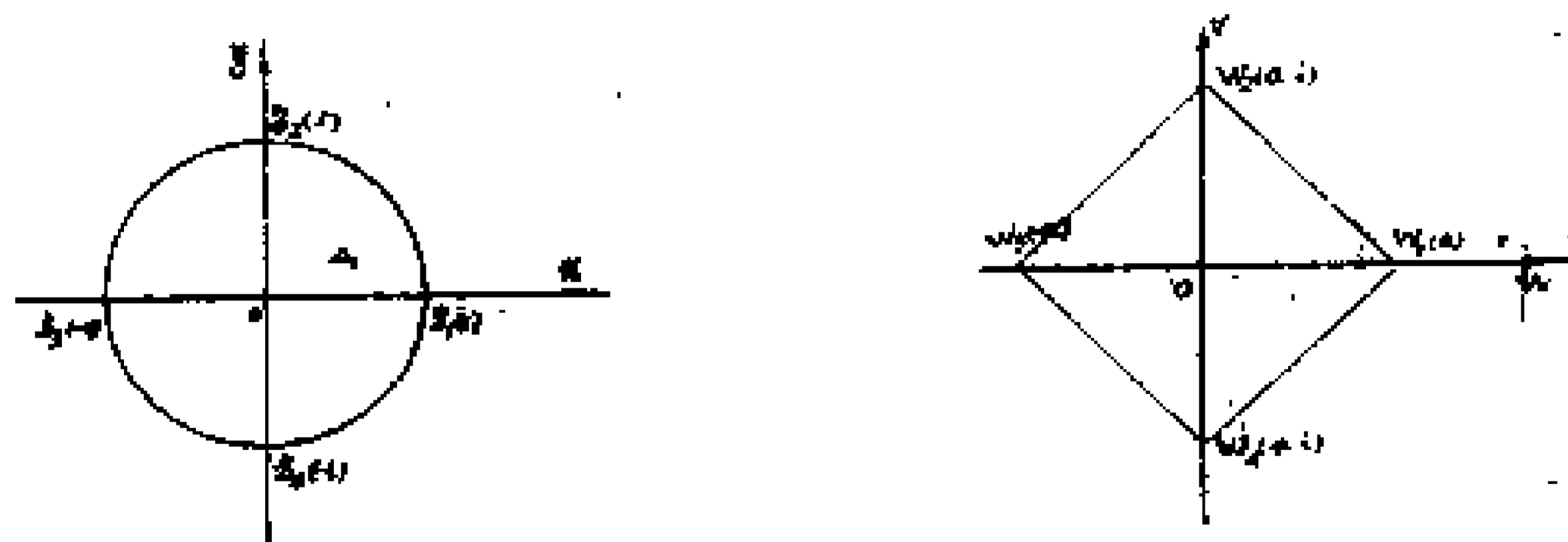


图7.5

定理, 必存在单叶函数 $w = f(z)$ 把 z 平面上第一象限的圆域 Δ_1 映照为 w 平面上第一象限的三角形域 Δ'_1 , 且把三点 O ,

z_1, z_2 分别映照为三点 O, w_1, w_2 . 利用对称原理, $w = f(z)$ 将单位圆盘映照为所述的正方形内部, 且分别把 z_1, z_2, z_3 和 z_4 映照为 w_1, w_2, w_3 和 w_4 .

利用第12题的公式, 有:

$$\begin{aligned} w &= C \int_0^z (z-1)^{-\frac{1}{2}} (z-i)^{-\frac{1}{2}} (z+1)^{-\frac{1}{2}} (z+i)^{-\frac{1}{2}} dz + C_1 \\ &= C \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{z^4-1}} + C_1 = \frac{C}{i} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} + C_1 \end{aligned}$$

此处 $\sqrt{1-z^4}$ 在单位圆 $|z| < 1$ 内解析, 取 $\sqrt{1-z^4}|_{z=0}=1$ 的那个解析分枝。

$z=1$ 时, $w=a$, 从而 $a = \frac{C}{i} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$, 利用推广的柯西定理, 可证积分与路径无关, 故可取其轴上区间 $[0, 1]$

作为积分路径. 作变量代换, 设 $z^4=t$, $dz = \frac{dt}{4t^{\frac{3}{4}}}$,

$$\begin{aligned} z=1 \text{ 时, } t=1 \text{ 从而 } a &= \frac{C}{i} \int_0^1 \frac{dt}{4t^{\frac{3}{4}} \sqrt{1-t}} = \\ &= \frac{C'}{4} \int_0^1 t^{-\frac{3}{4}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt. \text{ 此处 } C' = \frac{C}{i}. \end{aligned}$$

利用公式 $\int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$, 得:

$$a = \frac{C'}{4} \int_0^1 t^{-\frac{3}{4}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{C' \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{4 \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)},$$

$$\therefore C' = \frac{4a\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

又由 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}$,

取 $n = \frac{3}{4}$, 得 $\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\pi$,

$$\text{故 } \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}. \quad \therefore C' = \frac{4a\sqrt{2}\pi}{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}.$$

$$\therefore w = \frac{4a\sqrt{2}\pi}{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}.$$

14. 用多角形映照公式, 把扩充 z 平面上单位圆的外部 $|z| > 1$ 映照成扩充 w 平面上去掉割线 $-1 \leq \operatorname{Re} w \leq 1, \operatorname{Im} w = 0$ 而得的部分.

解: 把单位圆的外部映照为多角形的外部 ($z = \infty$ 对应于 $w = \infty$) 的映照公式*为:

$$w = c \int_{z_0}^z (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1} \frac{dz}{z^2} + c_1.$$

式中 $\alpha_k = \frac{\beta_k}{\pi}$ ($k = 1, 2, \dots, n$), a_k 为单位圆周上对应于多角形顶点的哪些点, c 和 c_1 为常数.

* 参看斯米尔诺夫著高等数学教程第三卷第二分册第二章 § 38(62)式.

由于 w 平面的多角形可看作一个两边形, 顶点为 1 和 -1 , 且 $\beta_1 = \beta_2 = 2\pi$.

在单位圆上取 $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, 相应于 $w_1 = -1$, $w_2 = 1$, 则有:

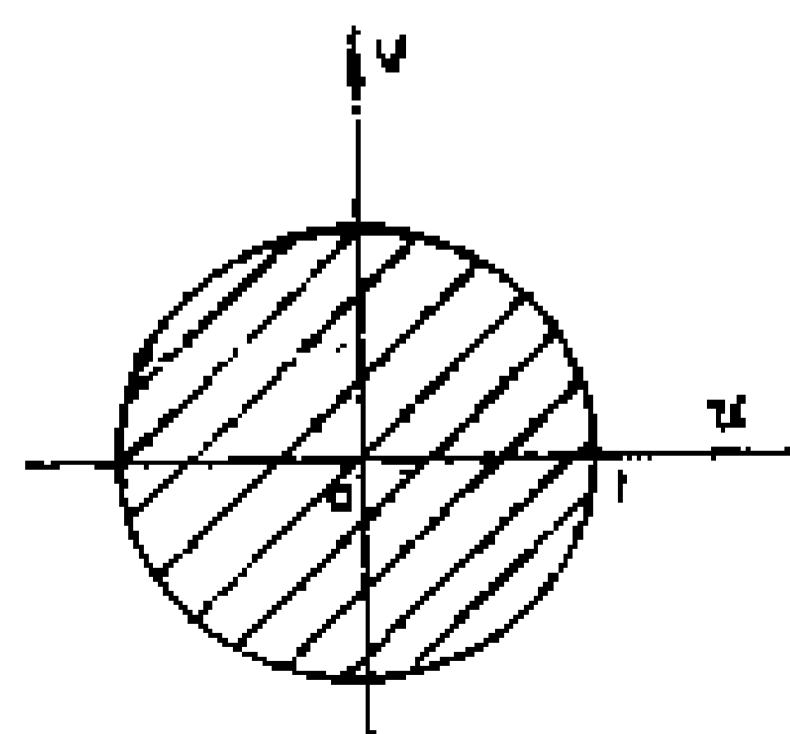
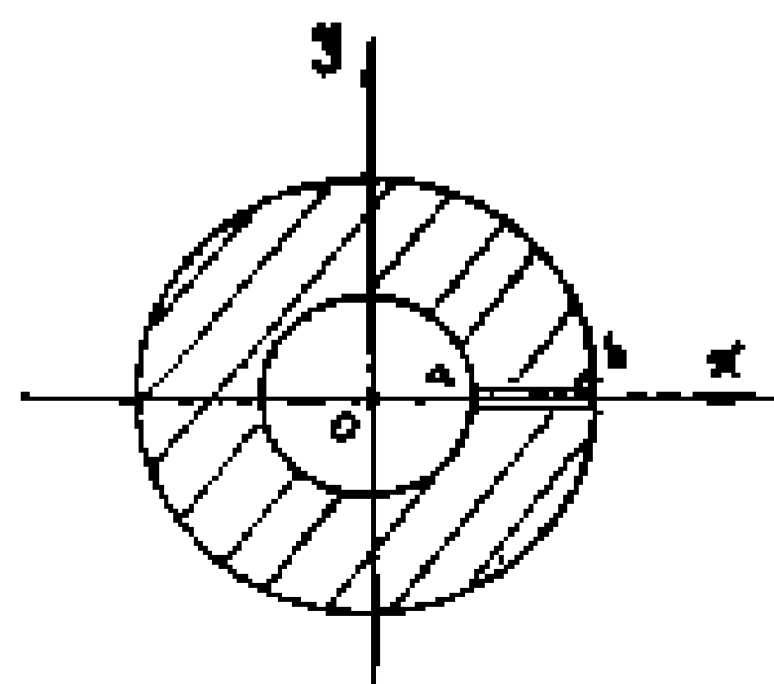
$$\begin{aligned} w &= c \int_1^{\xi} (\xi + 1)(\xi - 1) \frac{d\xi}{\xi^2} + c_1 \\ &= c \int_1^{\xi} \left(1 - \frac{1}{\xi^2}\right) d\xi + c_1 = c \left(\xi + \frac{1}{\xi}\right) + c_1 \end{aligned}$$

利用关系 $-1 \longrightarrow -1$, $1 \longrightarrow 1$, 可得 $c_1 = 0$, $c = \frac{1}{2}$,

$$\therefore w = \frac{1}{2} \left(\xi + \frac{1}{\xi} \right).$$

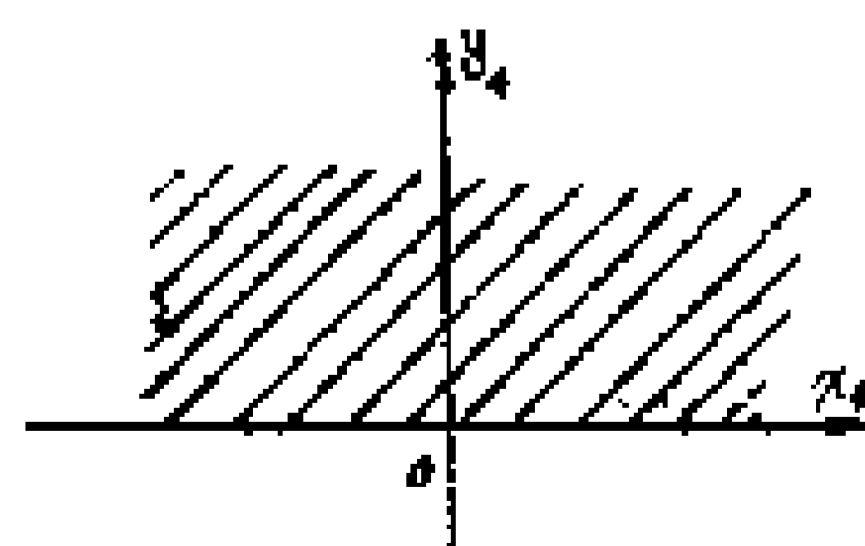
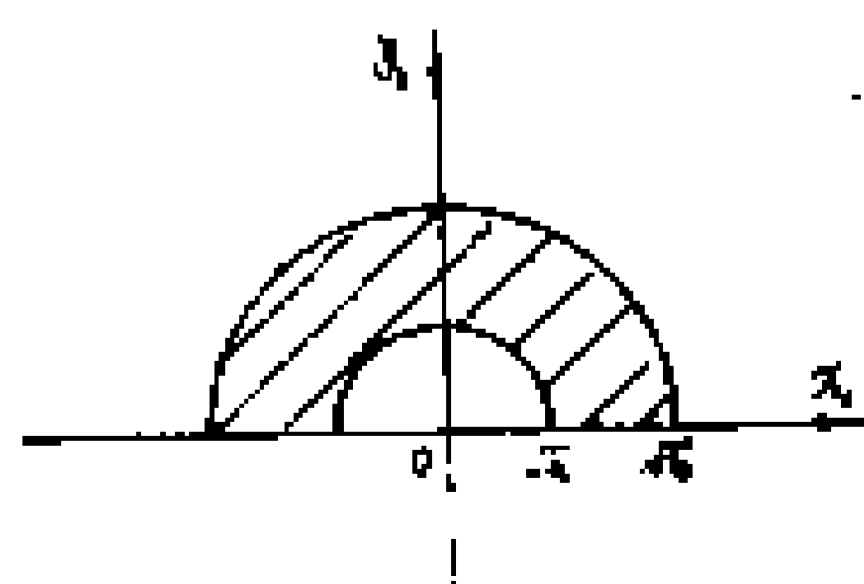
15. [第六章第16(3)题] 试作保形映照:
把圆环 $0 < a < |z| < b$ 除去实轴上的区间 (a, b) 而得的区域映照成 $|z| < 1$.

解: 见图 7.6.



$$z_1 = \sqrt{z} \downarrow 0 < \arg z_1 < 2\pi$$

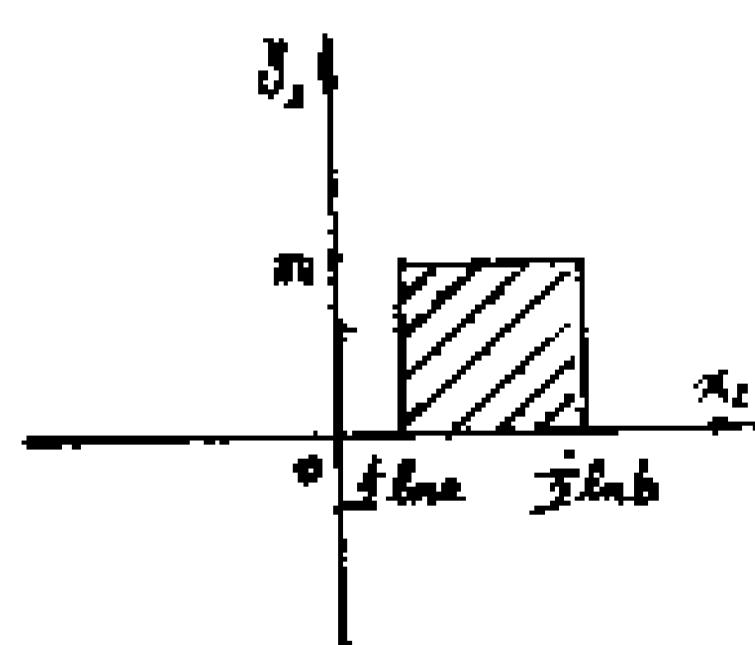
$$\uparrow w = \frac{z-i}{z+i}$$



$$z_2 = \ln z_1 \downarrow 0 < \arg z_1 < \pi$$

$$z_4 = \sin z_3$$

$$\begin{array}{l} \uparrow \text{参见书 P.183 例 2} \\ k = \frac{1}{4} \ln \frac{b}{a} \\ k' = \pi \end{array}$$



$$z_3 = z_2 - \frac{1}{4} \ln ab$$

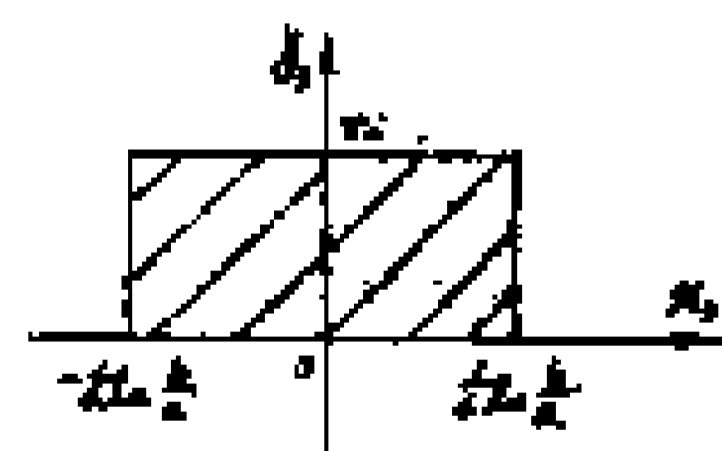


图 7.6

第八章 调和函数

1. 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 而且不等于零. 直接计算证明: 在 D 内, $\Delta \ln |f(z)| = 0$, 若补充规定 $|f'(z)| \neq 0$ 则 $\Delta |f(z)| > 0$.

证: 因为 $f(z) = u + iv$ 在 D 内解析, 所以 u, v 满足 $C-R$ 条件: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ 和拉普拉斯方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$.

在 D 内由 $f(z) \neq 0$, 可设

$$F(x, y) \equiv \ln |f(z)| = \frac{1}{2} \ln(u^2 + v^2),$$

$$\text{于是: } \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{u^2 + v^2} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \frac{1}{u^2 + v^2} \left[u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] - \\ &= \frac{2}{(u^2 + v^2)^2} \left[u^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2uv \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right] \end{aligned}$$

同理可得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= \frac{1}{u^2 + v^2} \left[u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] - \\ &= \frac{2}{(u^2 + v^2)^2} \left[u^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2uv \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right], \end{aligned}$$

$$\text{从而 } \Delta \ln |f(z)| = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$$

设 $E(x, y) \equiv |f(z)| = \sqrt{u^2 + v^2}$, 则

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} &= \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} \left[u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] - \\ &= \frac{1}{(\sqrt{u^2 + v^2})^3} \cdot \left[u^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2uv \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right], \end{aligned}$$

类似地有:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} &= \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} \left[u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] - \\ &= \frac{1}{(\sqrt{u^2 + v^2})^3} \cdot \left[u^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2uv \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right], \end{aligned}$$

于是由 $f(z) \neq 0$ 和 $f'(z) \neq 0$ 可得:

$$\Delta |f(z)| = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = \frac{|f'(z)|^2}{|f(z)|} > 0.$$

2. 求一解析函数, 使其实部为 $e^x(x \cos y - y \sin y)$.

解: 设 $u(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y)$. 在整个复平面上, 经过简单计算容易得出, 它的一阶二阶偏导数连续, 且适合拉普拉斯方程, 故知它为调和函数.

下求与 $u(x, y)$ 共轭的调和函数 $v(x, y)$. 取自 (x_0, y_0) 到 (x, y_0) , 及由 (x, y_0) 到 (x, y) 的直线段作为积分路线, 得:

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \\ &= \int_{x_0}^x e^x (x \sin y + \sin y + y \cos y) dx + \end{aligned}$$

$$+\int_{y_0}^y e^x (x \cos y - y \sin y + \cos y) dy + c$$

$$= e^x (x \sin y + y \cos y) + c_1,$$

$$\therefore f(z) = u + iv = e^x (x + iy)(\cos y + i \sin y) + ic_1 \\ = ze^z + ic_1.$$

即为所求解析函数，其中 c_1 是实常数。

3. 试求形如 $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ 的最一般的调和函数，其中 a, b, c 及 d 是实常数。

解：设 $u = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$,

按条件要求，应有 $\Delta u = 0$ ，即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2x(3a + c) + 2y(b + 3d) = 0$$

故得， $c = -3a$ ， $b = -3d$ 。

故所求的最一般的调和函数是，

$$a(x^3 - 3xy^2) + d(y^3 - 3x^2y) = a \operatorname{Re}(z^3) + id \operatorname{Im}(z^3)$$

其中 a, d 为任意实常数。

4. 设实变数实值函数 $u(x, y)$ 是在 $0 < |z| < \rho (< +\infty)$ 内的有界调和函数，证明适当定义 $u(0, 0)$ 后， $u(x, y)$ 是在 $|z| < \rho$ 内的调和函数。

证法一：研究 $u(z)$ 在 $D: 0 < |z| < \rho$ 内的共轭调和函数 $v(z)$ ，

$$v(z) = \int_{z_0}^z -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + c \quad (*)$$

上式中的 c 是某一确定的复常量，积分路线是联结 z_0 和 z 且在 D 内的任一简单逐段光滑曲线。设 γ 是在 D 内的逐段光滑的简单闭曲线，则当 z 沿 γ 的正向绕行一周时， $v(z)$ 有增量

$$\Gamma = \int_{\gamma} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy,$$

于是(*)式可写或 $v(z) = v_0(z) + k\Gamma + c$

其中 $v_0(z)$ 是(*)中积分的某一枝, k 为任意整数.

当 $\Gamma = 0$ 时, $v(z)$ 是 D 内的单值调和函数, 从而

$f(z) = u(z) + iv(z)$ 是 D 内的单值解析函数, 于是

$g(z) = e^{f(z)} = e^{u(z) + iv(z)}$ 也是 D 内的单值解析函数.

又由 $u(z)$ 在 D 内有界知 $g(z)$ 也在 D 内有界, 因此 $z=0$ 是 $g(z)$ 的可去奇点. 规定 $g(0) = \lim_{z \rightarrow 0} g(z)$, 相应地就规定了

$u(0,0) = \lim_{z \rightarrow 0} u(z)$. 作了这样的规定后, $g(z)$ 在 $|z| < \rho$ 内解

析, 因而 $f(z)$ 在 $|z| < \rho$ 内解析. 从而 $u(z)$ 在 $|z| < \rho$ 内调和.

当 $\Gamma \neq 0$ 时, $f(z) = u(z) + iv(z) - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z$ 在 D 内单值解析. 这是因为当 z 沿 γ 正向 (负向) 绕行一周时, iv 有增量 $i\Gamma$ ($-i\Gamma$), 而 $-\frac{\Gamma}{2\pi} \ln z$ 有增量 $-i\Gamma$ ($i\Gamma$), 从而 $f(z)$

无增量, 并且 $f(z)$ 的实部与虚部互为共轭调和函数. 令

$$g(z) = e^{\frac{2\pi}{\Gamma}(u+iv)} = ze^{\frac{2\pi}{\Gamma}f(z)}.$$

它也是 D 内的单值解析函数. 又 $|g(z)| = |z|e^{\frac{2\pi}{\Gamma}u(z)}$, 可知 $g(z)$ 在 D 内有界, 因此 $z=0$ 是 $g(z)$ 的可去奇点. 仿照上面的讨论, 可证得: 适当规定 $u(0,0)$ 后, $u(z)$ 在 $|z| < 1$ 内调和.

证法二: 设 $u_1(x,y) = u_1(r,\theta)$, 它是在 $0 < |z| < \rho$ 内的单值调和函数, 相应地有共轭调和函数 $v(x,y) = v_1(r,\theta)$

及解析函数 $f(z) = u + iv$ 。于是 $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$ 显然是单值解析函数，从而在 $0 < |z| < \rho$ 内可展为罗朗级数：

$$f'(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n z^n.$$

由此得： $f(z) = A + A_{-1} \operatorname{Ln} z + \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{A_n z^{n+1}}{n+1}$, ($n \neq -1$)

从而 $u_1(r, \theta) = a + \alpha_{-1} \ln r + \beta_{-1} \operatorname{Arg} z +$
 $+ \sum_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\alpha_n}{n+1} \cos(n+1)\theta - \frac{\beta_n}{n+1} \sin(n+1)\theta \right] r^{n+1} (*)$

其中 $n \neq -1$, $a = \operatorname{Re} A$, $A_n = \alpha_n + i\beta_n$,
 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

由 $u_1(r, \theta)$ 的单值性可知 $\beta_{-1} = 0$ ，而由 $u_1(r, \theta)$ 的有界性可推得 $\alpha_{-1} = 0$ 。把(*)式两端同乘以 $\cos m\theta$ ，(m 为大于 1 的正整数) 并在 $[0, 2\pi]$ 上积分，则有

$$\int_0^{2\pi} u_1(r, \theta) \cos m\theta d\theta = \pi \frac{\alpha_{m-1}}{m} r^m + \pi \frac{\alpha_{-(m-1)}}{m} r^{-m}.$$

对于每个确定的 m ，以上等式左端始终是有界的，而右端当 r 充分小时，第一项有界，第二项可变得任意大，因此要使等式成立，必有： $\alpha_{-(m-1)} = 0$ ($m = 2, 3, \dots$)。

同样，等式(*)两端乘以 $\sin m\theta$ ，并作类似的讨论，即得： $\beta_{-(m-1)} = 0$ ($m = 2, 3, \dots$)。

可见 $u_1(r, \theta) = a + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\alpha_n}{n+1} \cos(n+1)\theta - \frac{\beta_n}{n+1} \sin(n+1)\theta \right] r^{n+1}$ 因此，若规定 $u(0, 0) = a$,

则显见 $u(x, y) = u_1(r, \theta)$ 就是在 $|z| < \rho$ 内的调和函数.

5. 试用调和函数的中值公式, 证明

$$\int_0^{2\pi} \ln(1 - 2r \cos \theta + r^2) d\theta = 0, \quad (-1 < r < 1).$$

证: 当 $0 \leq r < 1$ 时, 考虑函数 $\ln(1 - z)$ 在 $|z| < 1$ 内的一个解析分枝, 记为 $\ln(1 - z)$. 显然 $u(z) = \operatorname{Re}[\ln(1 - z)]$ 在 $|z| < 1$ 内调和, 且有 $u(0) = \operatorname{Re}[\ln 1] = 0$.

在圆 $|z| = r < 1$ 上, 有:

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= \operatorname{Re}[\ln(1 - z)] = \ln|1 - re^{i\theta}| \\ &= \frac{1}{2} \ln(1 - 2r \cos \theta + r^2). \end{aligned}$$

应用调和函数的中值公式, 可得:

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta.$$

$$\begin{aligned} \text{即} \quad 0 &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \ln(1 - 2r \cos \theta + r^2) d\theta \\ &= \frac{2}{4\pi} \int_0^{\pi} \ln(1 - 2r \cos \theta + r^2) d\theta \end{aligned}$$

$$\text{于是当 } 0 \leq r < 1 \text{ 时, } \int_0^{2\pi} \ln(1 - 2r \cos \theta + r^2) d\theta = 0$$

当 $-1 < r \leq 0$ 时, 可考虑 $\ln(1 + z)$ 在 $|z| < 1$ 内的一个解析分枝, 在 $|z| = r_1 < 1$ 上作类似于上述的讨论, 即可证得:

$$\int_0^{2\pi} \ln(1 + 2r_1 \cos \theta + r_1^2) d\theta = 0, \quad (0 \leq r_1 < 1).$$

于是当 $-1 < r \leq 0$ 时,

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \ln(1 - 2r \cos \theta + r^2) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \ln[1 + 2(-r) \cos \theta + (-r)^2] d\theta \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{r_1}} = -r \int_0^\pi \ln(1 + 2r_1 \cos \theta + r_1^2) d\theta = 0$$

故由以上讨论可知:

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2r \cos \theta + r^2) d\theta = 0, \quad (-1 < r < 1).$$

6. 证明: 如果在整个 z 平面的调和函数 $u(z)$ 是有界的那么 $u(z)$ 恒等于常数.

证法一: 在复平面上任取一点 $z_1 = re^{i\theta}$ 使 $0 \leq r < \rho$. 显然 $u(z)$ 是在 $|z| \leq \rho$ ($0 < \rho < +\infty$) 上的调和函数, 并且 $|u(z)| \leq M$ (常数).

由普阿松公式, 可知:

$$\begin{aligned} u(z_1) &= u(re^{i\theta}) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\varphi}) \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2\rho r \cos(\varphi - \theta) + r^2} d\varphi. \\ &= \left| \frac{u(z_1) - u(0)}{1} \right| = \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\varphi}) \left[\frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2\rho r \cos(\varphi - \theta) + r^2} - 1 \right] d\varphi \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{2\rho r \cos(\varphi - \theta) - 2r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\varphi - \theta)} u(\rho e^{i\varphi}) \right| d\varphi \\ &\leq M \cdot \frac{2\rho r + 2r^2}{(\rho - r)^2} \end{aligned}$$

令 $\rho \rightarrow +\infty$, 立即可得 $u(z_1) = u(0)$, 由于 z_1 的任意性, 故 $f(z)$ 恒等于常数 $u(0)$.

证法二: 因为 $u(z)$ 是在整个平面上调和的函数, 所以存在一个函数 $f(z)$, 它在整个平面上解析, 并且 $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$, 又 $|u(z)| \leq M$ (M 是正的常数).

考虑函数 $e^{f(z)}$, 显然它也在整个 z 平面上解析, 并且

$|e^{f(z)}| = e^{u(z)} \leq e^M$. 因此, 根据刘维尔定理, 可知 $e^{f(z)}$ 是常数, 从而 $u(z)$ 也是常数.

7. 试求在单位圆盘内的调和函数, 使其在单位圆的一段弧上取值 1, 而在圆上其余部分取值 0.

解: 设 $u(e^{i\varphi}) = \begin{cases} 1, & 0 < \alpha < \varphi < \beta < 2\pi \\ 0, & 0 \leq \varphi \leq \alpha, \text{ 或 } \beta \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$

由单位圆盘的普瓦松公式得:

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2} d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi(1+r^2)} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{(1-r^2)d\varphi}{1-\frac{2r}{1+r^2}\cos(\varphi-\theta)} \\ &= \frac{1}{2\pi(1+r^2)} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{(1-r^2)d\varphi}{1+\frac{2r}{1+r^2}\cos(\varphi-\theta-\pi)} \\ &= \frac{1-r^2}{2\pi(1+r^2)} \cdot \frac{2}{\sqrt{1-\left(\frac{2r}{1+r^2}\right)^2}} \cdot \\ &\quad \cdot \arctg \left(\sqrt{\frac{1-\frac{2r}{1+r^2}}{1+\frac{2r}{1+r^2}}} \operatorname{tg} \frac{\varphi-\theta-\pi}{2} \right) \Big|_{\alpha}^{\beta} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\arctg \frac{(1-r)\operatorname{tg} \frac{\beta-\theta-\pi}{2}}{1+r} - \arctg \frac{(1-r)\operatorname{tg} \frac{\alpha-\theta-\pi}{2}}{1+r} \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\arctg \frac{(1-r)\operatorname{ctg} \frac{\alpha-\theta}{2}}{1+r} - \arctg \frac{(1-r)\operatorname{ctg} \frac{\beta-\theta}{2}}{1+r} \right]. \end{aligned}$$

8. 试求在上半平面内的调和函数 $u(z)$, 使其在实轴上取值如下:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ (当 } t < -1 \text{ 时)}, \\ v & , \text{ (当 } -1 < t < 0 \text{ 时)}, \\ (v_2 - v_1)t + v_1, & \text{ (当 } 0 < t < 1 \text{ 时)}, \\ 0 & , \text{ (当 } t > 1 \text{ 时)}, \end{cases}$$

解: 由上半平面的普瓦松公式

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-1}^0 \frac{v y dt}{(t-x)^2 + y^2} + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 \frac{[(v_2 - v_1)t + v_1] y}{(t-x)^2 + y^2} dt \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-1}^0 \frac{v y dt}{(t-x)^2 + y^2} + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 \frac{[(v_2 - v_1)(t-x) + x(v_2 - v_1) + v_1] y}{(t-x)^2 + y^2} dt \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ v \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{-x}{y} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{-1-x}{y} \right) + \right. \\ &\quad + \frac{y(v_2 - v_1)}{2} [\ln((1-x)^2 + y^2) - \ln(x^2 + y^2)] + \\ &\quad \left. + [x(v_2 - v_1) + v_1] \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1-x}{y} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{-x}{y} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ v \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{y^2 + (1+x)x} + \right. \\ &\quad + \frac{y}{2} (v_2 - v_1) \ln \frac{(1-x)^2 + y^2}{x^2 + y^2} + \\ &\quad \left. + [x(v_2 - v_1) + v_1] \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{y^2 - (1-x)x} \right\}. \end{aligned}$$

第九章 解析函数对平面场的应用

1. 研究以下列各函数作为复势的平面稳定流动:

(1) $w = z^2$.

解: 在任一点 $z \neq 0$ 的速度是 $\overline{f'(z)} = 2\overline{z}$,

流函数是 $\psi(x, y) = 2xy$,

所以流线是曲线 $xy = c_1$.

势函数是 $\varphi(x, y) = x^2 - y^2$,

所以等势线是曲线

$$x^2 - y^2 = c_2.$$

流体分别从平面上下两方用相同的速度流动, 而在实轴相遇 (图 9.1),

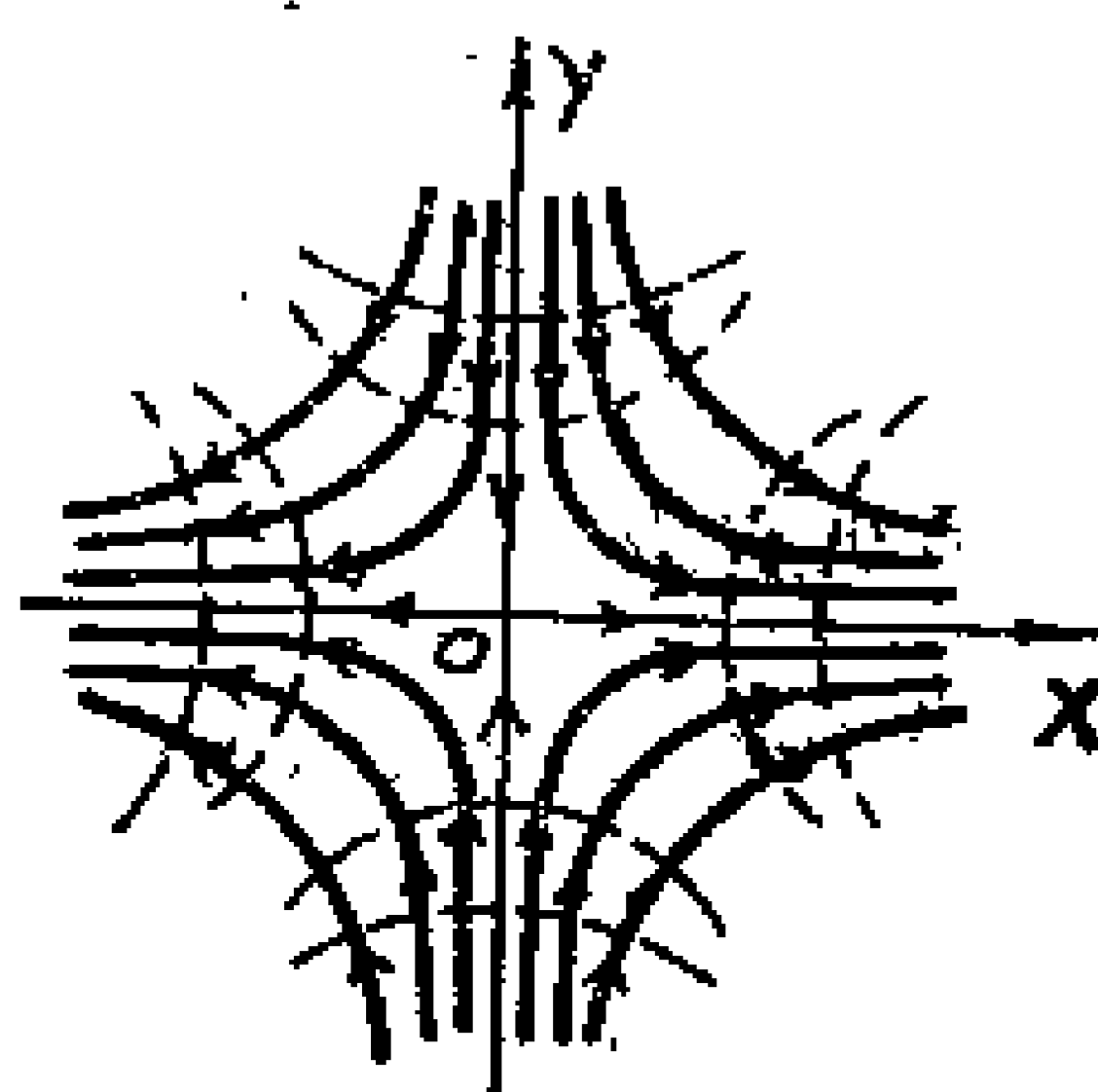
原点是临界点。速度等于零。

(2) $w = \sqrt{z}$.

解: 用极坐标表示为: $\sqrt{z} = \rho^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}}$

故流函数是 $\psi = \rho^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta}{2}$, 流线的方程是 $\rho = \frac{c_1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}$.

势函数是 $\varphi = \rho^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\theta}{2}$, 等势线的方程为 $\rho = \frac{c_2}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}$.



(图 9.1)

$$(3) \quad w = z + \frac{1}{z}.$$

解：在任一点 ($z \neq 0$) 的速度是 $\overline{f'(z)} = 1 - \frac{1}{z^2} = 1 - \frac{1}{z^2}$

$$= 1 + \frac{(y^2 - x^2) - i2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

流函数是 $\psi(x, y) =$

$$= y - \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \text{流线的}$$

方程为 $y - \frac{y}{x^2 + y^2} = c_1$, 当 $c_1 = 0$ 时, 它由圆周 $x^2 + y^2 = 1$

与 $y = 0$ 组成 (图 9.2)

$$\text{势函数是 } \varphi(x, y) = x + \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$\text{等势线为 } x + \frac{x}{x^2 + y^2} = c_2.$$

$$(4) \quad w = -\frac{1}{z^2}.$$

解：在任一点 ($z \neq 0$) 的速度是 $\overline{f'(z)} = -\frac{2}{z^3}$.

流函数是 $\psi(x, y) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$, 流线方程是

$$\frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} = c_1$$

势函数是 $\varphi(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$, 等势线方程是

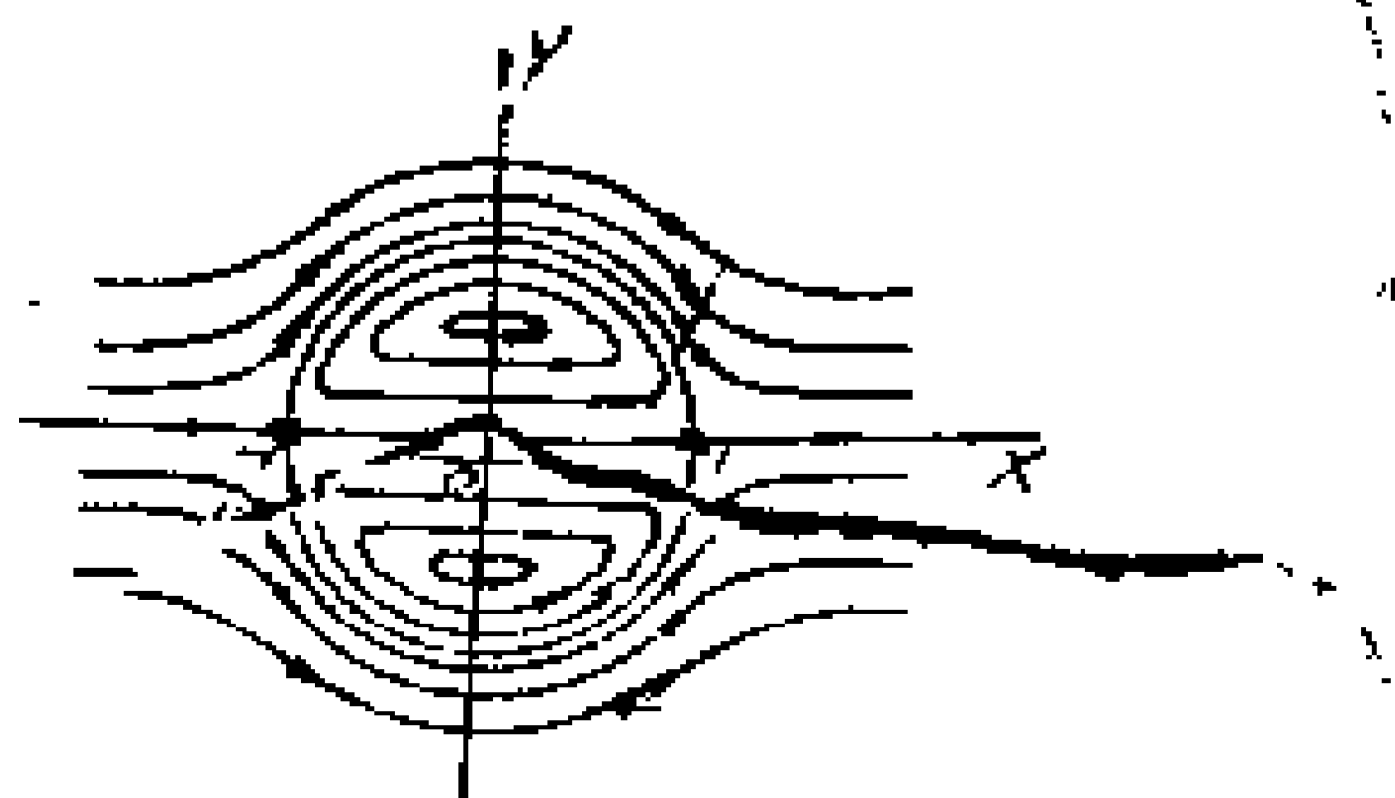


图 9.2

$$\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

2. 求速度为 $f(z)$ 的平面稳定流动沿圆 c 的环量, 在这里我们分别设:

(1) $f(z) = \operatorname{tg} \pi z$, c 为 $|z| = n$, 其中 n 是正整数;

(2) $f(z) = \frac{z^2 - 1}{(z^2 - R^2)^2}$, c 为 $|z| = R + 1$, 其中 $R > 0$.

$$\text{解: (1) } \int_c f(z) dz = \int_c \operatorname{tg} \pi z dz = \int_c \frac{\sin \pi z}{\cos \pi z} dz$$

$\cos \pi z$ 在 c 内有 $2n$ 个简单零点, 即

$$z = -n + \frac{1}{2}, -n + \frac{3}{2}, \dots, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, n - \frac{3}{2}, n - \frac{1}{2},$$

因 $\cos \pi z$ 的 $2n$ 个简单零点是 $\operatorname{tg} \pi z$ 的简单极点, 且 $\operatorname{tg} \pi z$ 再无其它奇点, 而每一极点处的留数为 $\frac{\sin \pi z}{(\cos \pi z)'} = -\frac{1}{\pi}$.

$$\text{故 } \int_c \operatorname{tg} \pi z dz = 2\pi i \cdot 2n \cdot \left(-\frac{1}{\pi}\right) = -4ni.$$

因此 $\Gamma = \operatorname{Re}(-4ni) = 0$.

$$(2) \int_c \frac{z^2 - 1}{(z^2 - R^2)^2} dz = \int_c \frac{z^2 - 1}{(z - R)^2 (z + R)^2} dz,$$

$c: |z| = R + 1, z = \pm R$ 为 $f(z) = \frac{z^2 - 1}{(z - R)^2 (z + R)^2}$ 的二阶极

$$\operatorname{Res}(f, R) = \lim_{z \rightarrow R} \frac{d}{dz} \left[(z - R)^2 f(z) \right]$$

$$= \lim_{z \rightarrow R} \frac{d}{dz} \left[\frac{z^2 - 1}{(z + R)^2} \right],$$

$$= \lim_{z \rightarrow R} \frac{2(zR+1)}{(z+R)^3} = \frac{2(R^2+1)}{(2R)^3} = \frac{1}{4R} + \frac{1}{4R^3}$$

$$\begin{aligned} \text{Res}[f, -R] &= \lim_{z \rightarrow -R} \frac{d}{dz} [(z+R)^2 f(z)] \\ &= \lim_{z \rightarrow -R} \frac{d}{dz} \left[\frac{z^2-1}{(z-R)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow -R} \frac{2(1-Rz)}{(z-R)^3} \\ &= \frac{2(1+R^2)}{(-2R)^3} = -\left(\frac{1}{4R} + \frac{1}{4R^3} \right) \end{aligned}$$

$$\therefore \int_C \frac{z^2-1}{(z^2-R^2)^2} dz = 2\pi i \{ \text{Res}[f(z), R] + \text{Res}[f(z), -R] \} = 0$$

从而 $\Gamma = 0$.

3. 平面静电场的势函数是 $v = \arctg \frac{\text{tg} \pi y}{\text{th} \pi x}$, 试求电力线的方程与复势.

$$\begin{aligned} \text{解: } \because \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-1}{1 + \left(\frac{\text{tg} \pi y}{\text{th} \pi x} \right)^2} \left(-\frac{\pi \text{tg} \pi y}{\text{sh}^2 \pi x} \right) \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\sin^2 \pi y \text{ch}^2 \pi x}{\text{sh}^2 \pi x \cos^2 \pi y}} \left(\frac{\pi \sin \pi y}{\text{sh}^2 \pi x \cos \pi y} \right) \\ &= \frac{\pi \cos \pi y \sin \pi y}{\text{sh}^2 \pi x \cos^2 \pi y + \sin^2 \pi y \text{ch}^2 \pi x} \\ &= \frac{\pi \cos \pi y \sin \pi y}{\text{sh}^2 \pi x + \sin^2 \pi y} \end{aligned}$$

同样可求得: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\pi \text{sh} \pi x \text{ch} \pi x}{\text{sh}^2 \pi x + \sin^2 \pi y}$

$$\begin{aligned}\therefore du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \\ &= \frac{\pi \operatorname{sh} \pi x \operatorname{ch} \pi x}{\operatorname{sh}^2 \pi x + \sin^2 \pi y} dx + \frac{\pi \sin \pi y \cos \pi y}{\operatorname{sh}^2 \pi x + \sin^2 \pi y} dy \\ &= d \ln \sqrt{\operatorname{sh}^2 \pi x + \sin^2 \pi y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{又 } \operatorname{sh} \pi z &= \operatorname{sh}(\pi x + i\pi y) = \operatorname{sh} \pi x \operatorname{ch} i\pi y + \operatorname{ch} \pi x \operatorname{sh} i\pi y \\ &= \operatorname{sh} \pi x \cos \pi y + i \operatorname{ch} \pi x \sin \pi y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore |\operatorname{sh} \pi z| &= \sqrt{\operatorname{sh}^2 \pi x \cos^2 \pi y + \operatorname{ch}^2 \pi x \sin^2 \pi y} \\ &= \sqrt{\operatorname{sh}^2 \pi x + \sin^2 \pi y}\end{aligned}$$

从而 $du = d \ln |\operatorname{sh} \pi z|$, 由此推得电力线的方程为:

$$u = \ln |\operatorname{sh} \pi z| + c_1, \text{ 即 } |\operatorname{sh} \pi z| = c_2, \text{ 复势为}$$

$$\Phi(z) = \ln \operatorname{sh} \pi z + c_0.$$

4. 平面静电场的等势线为圆周 $x^2 + y^2 = 2ax$, 其中 a 为一实数, 求在 $(2a, 0)$ 与 (a, a) 的电场强度大小的比。

解: \because 等势线为 $x^2 + y^2 = 2ax$,

$$\therefore \text{故势函数为 } v = \frac{x^2 + y^2}{2x}.$$

$$\therefore \text{但 } E = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2},$$

$$\therefore \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2} - \frac{y^2}{2x^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y}{x}.$$

$$\begin{aligned}\therefore E &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{y^2}{2x^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)\end{aligned}$$

$$E_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)_{\substack{x=2a \\ y=0}} = \frac{1}{2}$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{y^2}{x^2} \right)_{x=y=a} = 1 \quad \therefore \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{2}{1} = \frac{1}{2}.$$

5. 设在射线 $x=0, y \geq a (>0)$ 上, 电势为 V_0 , 而在实轴上为零, 求所产生的静电场。

解: 求静电场的复势就是找一函数 $w = f(z)$, 使已知区域 D 保形映照成 w 平面上的带形 $0 < \operatorname{Im} w < V_0$, 而使射线, 实轴分别与 $\operatorname{Im} w = V_0, \operatorname{Im} w = 0$ 相对应。按下面的映照 (图9.3) 来完成,

$$\therefore w = \frac{V_0}{\pi} \ln \frac{\sqrt{z^2 + a^2} - az}{\sqrt{z^2 + a^2} + az} \text{ 为所求复势, 它是区域 } D$$

内单值函数, 用它可求出静电场中的各量。

6. 试求垂直于 z 平面且与 z 平面交于圆 $|z|=1$ 及 $|z-1| = \frac{5}{2}$ 的两个柱面之间的静电场, 设两柱面之间的电势差为1。

解: 首先作分式线性映射 $w_1 = \frac{z-z_1}{z-z_2}$, z_1, z_2 是关于

$c_1: |z|=1$ 和 $c_2: |z-1| = \frac{5}{2}$ 对称的两点。把 c_1 和 c_2 映照为 w_1 平面上的 c_1' 和 c_2' , z_1 和 z_2 映照为 $w_1 = 0, w_1 = \infty$ 。由于 $w_1 = 0$ 和 $w_1 = \infty$ 是关于 c_1' 和 c_2' 对称的, 故 c_1', c_2' 为中心在 $w_1 = 0$ 处的两个同心圆。(图9.4)

由于 c_1, c_2 的中心均在实轴上, 所以点 z_1 和 z_2 也应该在实轴上, 于是可设 $z_1 = x_1, z_2 = x_2$,

$\therefore x_1, x_2$ 关于 c_1 对称, 故有 $x_1 x_2 = 1$, 又 x_1, x_2 关于 c_2 对称, 故也有 $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = \left(\frac{5}{2}\right)^2$ 。

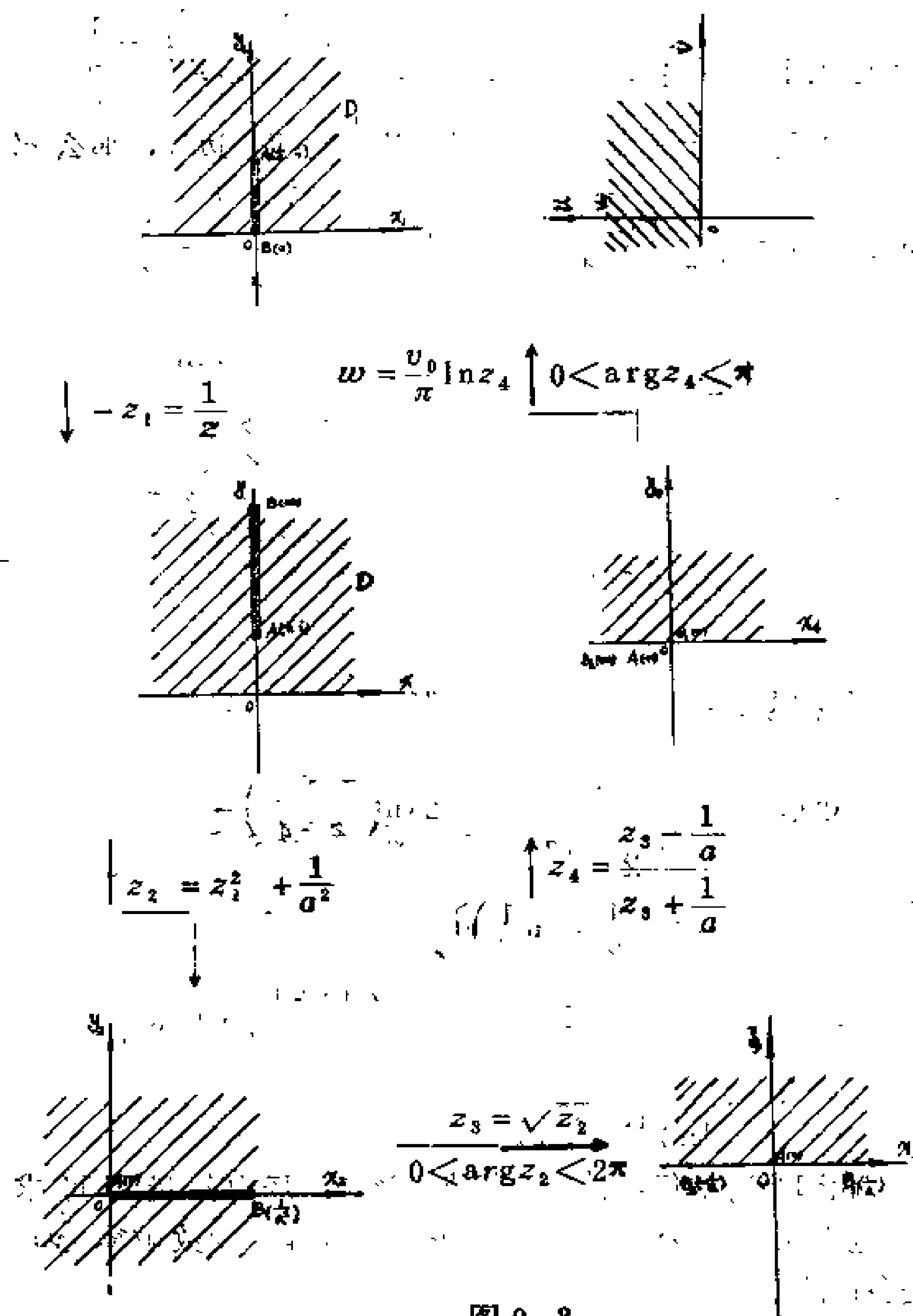


图 9.3

解上面两式可得: $x_1 = -\frac{1}{4}$, $x_2 = -4$, 故 $w = \frac{z + \frac{1}{4}}{z + 4}$

由于实轴上的点映照到实轴, 边界映照到边界, 那么 c'_1

的半径 $r_1 = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{1 + 4} = \frac{1}{10}$, c'_2 的半径 $r_2 = \frac{\frac{7}{2} + \frac{1}{4}}{\frac{7}{2} + 4} = \frac{1}{2}$.

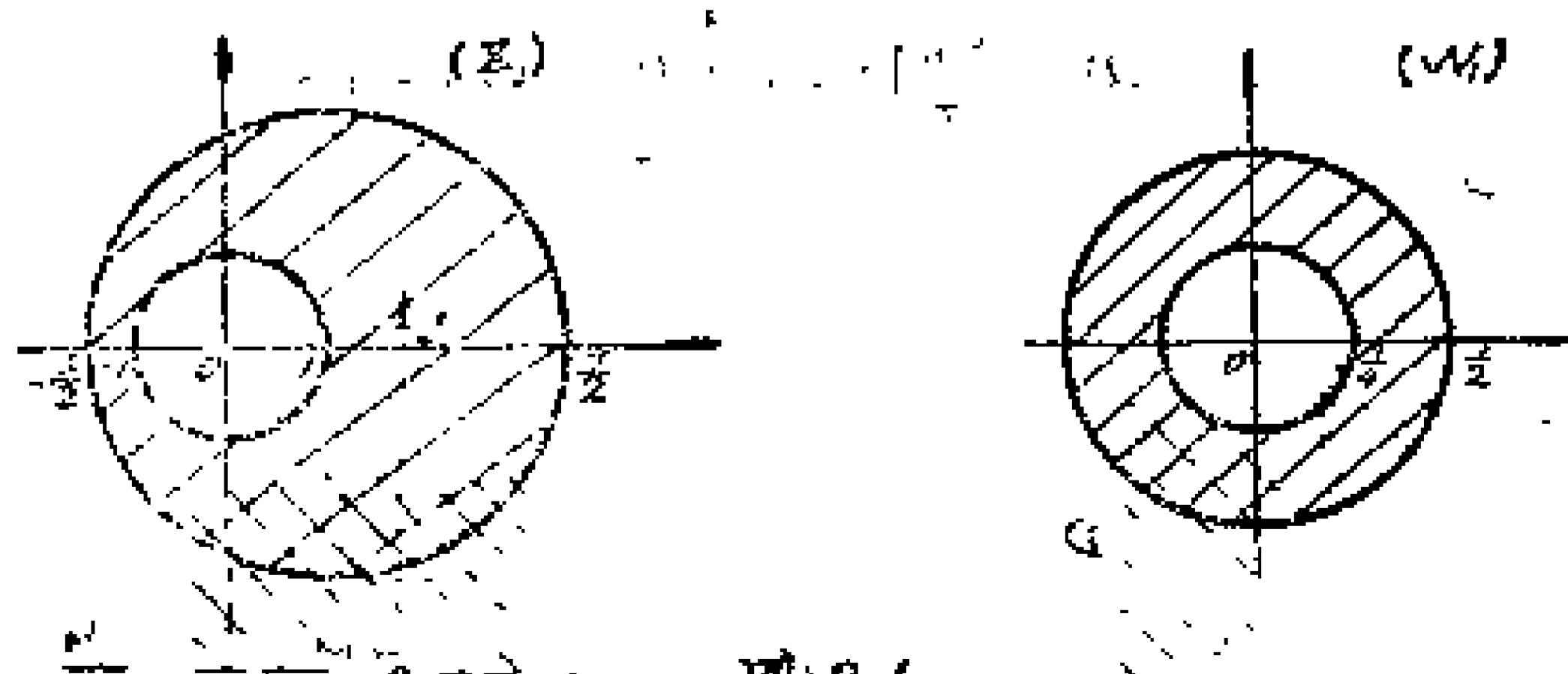


图 9.4

故按 § 2 第四段例 1 的结果得:

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \frac{i}{2} \left[2 \ln \left(\frac{z + \frac{1}{4}}{z + 4} \right) - \left(\ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{4} \right) \right] \\ &= \frac{i}{2 \ln 2} \left[2 \ln \frac{1}{4} + 2 \ln \left(\frac{4z + 1}{z + 4} \right) + \ln 8 \right] \\ &= \frac{i}{\ln 2} \ln \frac{4z + 1}{z + 4}\end{aligned}$$

此即为所求复势。有了复势, 该静电场中各量即可求得。这个函数是多值解析函数, 它的实部即力函数 $\psi(x, y)$ 是多值的。

§ 9.4